Національна академія наук України
Інститут математики

А.П.ГОЛУБ

Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде

Київ -2002

УДК 517.53

В монографії викладено метод узагальнених моментних зображень, запропонований В.К. Дзядиком в 1981 р., та його застосування до побудови та вивчення раціональних апроксимацій Паде аналітичних та спеціальних функцій. Значну увагу приділено дослідженню властивостей біортогональних систем функцій. Розглянуто застосування методу узагальнених моментних зображень до побудови та вивчення сумісних апроксимацій Паде, апроксимацій Паде–Чебишева та двоточкових апроксимацій Паде.

Відповідальний редактор – чл.–кор. НАН України О.І. Степанець

Затверджено до друку Вченою радою
Інституту математики НАН України.

ISBN

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

В монографії вперше систематично викладено метод узагальнених моментних зображень, запропонований В.К.Дзядиком в 1981 р., та його застосування до побудови і дослідження раціональних апроксимацій аналітичних та спеціальних функцій.

В першому розділі наводяться попередні дані про апроксимації Паде і короткий історичний огляд їх становлення та розвитку. Зокрема, описано підхід до вивчення апроксимацій Паде, оснований на класичній проблемі моментів. Наведено основні теореми, на яких грунтується застосування узагальнених моментних зображень до побудови та дослідження апроксимацій Паде. Встановлено теореми існування для узагальнених моментних зображень.

В другому розділі побудовано узагальнені моментні зображення для цілого ряду елементарних та спеціальних функцій.

Третій розділ присвячено розгляду властивостей біортогональних поліномів та їх застосуванню до встановлення теорем інваріантності для апроксимацій Паде.

В четвертому розділі за допомогою методу узагальнених моментних зображень побудовано та досліджено апроксимації Паде для ряду елементарних та спеціальних функцій.

П'ятий розділ присвячено застосуванню узагальнених моментних зображень до побудови та вивчення сумісних апроксимацій Паде, апроксимацій Паде-Чебишева та двоточкових апроксимацій Паде.

Нумерація параграфів, теорем, лем, зауважень, означень, формул є окремою в кожному розділі, і тому при перехресних посиланнях додатково вказується номер розділу.

Р О З Д І Л 1
АПРОКСИМАЦІЇ ПАДЕ. КЛАСИЧНА ПРОБЛЕМА МОМЕНТІВ ТА УЗАГАЛЬНЕНІ МОМЕНТНІ ЗОБРАЖЕННЯ

§ 1. Апроксимації Паде

В другій половині минулого сторіччя в безпосередньому зв'язку з бурхливим розвитком обчислювальної техніки значно зріс інтерес до вивчення методів чисельного аналізу і, зокрема, методів теорії наближення функцій. Поряд з класичними многочленними наближеннями, тригонометричними поліномами, сплайнами, вейвлетами та ін. пильна увага дослідників не обминула і теорію раціональної апроксимації. Історично раціональні наближення (тобто наближення відношеннями двох алгебраїчних многочленів) вперше виникли як підхідні дроби ланцюгових дробів (див. [45]). Такі дроби розглядалися Л. Ейлером, Ж. Лагранжем, Л. Гауссом та ін. Виявилося, що методи наближення раціональними функціями дають можливість ефективно розв'язувати ряд важливих прикладних задач. В основному це пов'язано з дією трьох факторів:

1) у багатьох важливих випадках швидкість збіжності раціональних наближень значно перевищує швидкість збіжності поліноміальних наближень Так, скажімо, величина $E_{N,N}\left(e^z; C_{K_R}\right)$ найкращого рівномірного наближення функції e^z раціональними поліномами вигляду

$$R_{N,N}(z) = \frac{P_N(z)}{Q_N(z)},$$

де $P_N(z)$ та $Q_N(z)$ - алгебраїчні многочлени степенів $\leq N$ в крузі $K_R = \{z: \quad |z| \leq R\}$ допускає оцінку

$$E_{N,N}\left(e^z; C_{K_R}\right) \leq A \cdot 4^{-N} E_{2N}\left(e^z; C_{K_R}\right),$$

де $A = \mathrm{const}$, а $E_{2N}\left(e^z; C_{K_R}\right)$ - величина найкращого рівномірного наближення функції e^z в крузі K_R за допомогою алгебраїчних многочленів степеня $\leq 2N$. Інакше кажучи, функція e^z в крузі K_R раціональними поліномами наближується в 4^N разів краще, ніж алгебраїчними многочленами з тією ж кількістю коефіцієнтів (див. [53, с.243]). Відомо також, наприклад, що функцію $|x|$ на відрізку $[-1,1]$ не можна наблизити алгебраїчними многочленами так, щоб порядок наближення був кращим за $\frac{1}{N}$, де N - степінь многочлена. Разом з тим встановлено, що

$$E_{N,N}\left(|z|; C[-1,1]\right) \leq \frac{3}{e^{\sqrt{2N}}}$$

(див. [53, с.243]);

2) дуже часто область збіжності раціональних наближень є ширшою за область збіжності степеневих рядів, які зазвичай використовуються в прикладних дослідженнях. На-

приклад, раціональні поліноми Паде функції $\mathrm{arctg} z$ вигляду

$$R_{N,N}(z) = \frac{P_N(z)}{Q_N(z)},$$

де $P_N(z)$ та $Q_N(z)$ - алгебраїчні многочлени степенів $\leq N$, збігаються до неї рівномірно на кожному компакті з зірки Міттаг-Леффлера $\mathbb{C} \setminus ((-i\infty, -i] \cup [i, i\infty))$. Разом з тим многочлени Тейлора функції $\mathrm{arctg} z$ збігаються лише всередині круга $K_1 = \{z : \quad |z| \leq 1\}$;

3) в деяких практичних задачах виникає необхідність обраховувати розташування особливих точок наближуваних функцій, і саме дослідження раціональних наближень, що мають полюси в комплексній площині, дозволяє розв'язувати такі задачі.

В теорії раціональної апроксимації аналітичних функцій одну з центральних ролей відіграють так звані апроксиманти (або ж поліноми) Паде, які є природними узагальненнями многочленів Тейлора в тому розумінні, що вони здійснюють найкращі локальні раціональні наближення функцій.

Означення 1 (див. [5, с. 31]). Будемо говорити, що раціональна функція

$$[M/N]_f(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)},$$

де P_M та Q_N – алгебраїчні могочлени степенів $\leq M$ та $\leq N$ відповідно, є апроксимантою Паде порядку $[M/N]$ формального степеневого ряду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k, \tag{1}$$

якщо

$$f(z) - [M/N]_f(z) = O(z^{M+N+1}) \quad \text{при} \quad z \to 0, \tag{2}$$

тобто розклад раціональної функції $[M/N]_f(z)$ в степеневий ряд співпадає з розкладом (1) до члена, що містить z^{M+N}, включно.

Надалі будемо позначати через $\mathscr{R}[M/N]$ клас всіх раціональних функцій вигляду $\frac{P_M(z)}{Q_N(z)}$ таких, що $\deg P_M \leq M$ і $\deg Q_N \leq N$.

Апроксиманти Паде були запроваджені німецьким математиком К. Якобі у 1846 р. [182], і ним же були побудовані детермінантні вирази для апроксимант Паде через коефіцієнти степеневого розкладу наближуваної функції.

Нехай $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ – послідовність коефіцієнтів степеневого ряду f вигляду (1). Запишемо многочлени P_M та Q_N з невизначеними коефіцієнтами

$$P_M(z) = \sum_{j=0}^{M} p_j^{(M)} z^j,$$

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} q_j^{(N)} z^j.$$

З (2) матимемо

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k \cdot \sum_{j=0}^{N} q_j^{(N)} z^j - \sum_{j=0}^{M} p_j^{(M)} z^j = O(z^{M+N+1}) \quad \text{при} \quad z \to 0. \tag{3}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при z^j, $j = \overline{0, M+N}$, в лівій та правій частині (3), бачимо, що для визначення коефіцієнтів многочленів P_M та Q_N потрібно розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Скористаємося для цього формулами Крамера (див. [61, с.128]). Розглянемо визначники

$$H_{L,N} = \det\|s_{L+k+j}\|_{k,j=0}^{N} = \begin{vmatrix} s_L & s_{L+1} & \cdots & s_{L+N} \\ s_{L+1} & s_{L+2} & \cdots & s_{L+N+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{L+N} & s_{L+N+1} & \cdots & s_{L+2N} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Будемо називати такі визначники визначниками Ганкеля послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$. Введемо до розгляду також алгебраїчні доповнення $A_{L,N,j}$, $j = \overline{0, N}$, елементів останнього рядка визначника (4). Результат К. Якобі полягає в тому, що у випадку відмінності від нуля визначника $H_{M+1-N,N-1} \neq 0$ для функції f, що має розклад (1), існує її апроксиманта Паде порядку $[M/N]$ і вона може бути представлена у вигляді

$$[M/N]_f(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} A_{M+1-N,N,j} z^{N-j},$$

$$P_M(z) = \sum_{j=0}^{N} A_{M+1-N,N,j} \sum_{m=0}^{M-N+j} s_m z^{N+m-j}.$$

Зазначимо, що в наведених формулах покладено $s_m = 0$, якщо $m < 0$, і $\sum_{m=i}^{j} = 0$, якщо $j < i$.

Надалі німецький математик Ф. Фробеніус у 1881 р. дослідив алгебраїчні властивості поліномів Паде і встановив тотожності для поліномів Паде, чисельники та знаменники яких мають степені, що відрізняються не більше, ніж на одиницю [161]. Нарешті у серії праць, опублікованих з 1892 по 1907 рр., французький математик Анрі Паде розташував поліноми Паде в двопараметричну напівнескінченну таблицю, що нині називається таблицею Паде, вивчив структуру цієї таблиці, а також побудував і дослідив першу піддіагональ таблиці Паде для гіпергеометричної функції Гауса ${}_2F_1(1,\sigma;\rho+1;z)$ та виродженої гіпергеометричної функції ${}_1F_1(1;\nu+1;z)$ [212,213].

Означення 2. Нехай f – формальний степеневий ряд. Таблицею Паде, що відповідає f, будемо називати двопараметричну напівнескінченну таблицю, елементами якої є апроксиманти Паде $[M/N]_f(z)$ (якщо вони існують)

$$\begin{array}{ccccc}
[0/0]_f(z) & [1/0]_f(z) & \cdots & [M/0]_f(z) & \cdots \\
[0/1]_f(z) & [1/1]_f(z) & \cdots & [M/1]_f(z) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
[0/N]_f(z) & [1/N]_f(z) & \cdots & [M/N]_f(z) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}.$$

Верхній рядок таблиці Паде складають елементи $[M/0]_f(z)$, $M=\overline{0,\infty}$, які є частинними сумами ряду (1), або ж многочленами Тейлора–Маклорена функції f. Починаючи з роботи Монтессу де Болора [207], багато досліджень було присвячено вивченню поведінки рядків таблиці Паде (див. [11,13,38,91,194]), але найбільший інтерес викликає вивчення поведінки елементів діагоналі та першої піддіагоналі таблиці Паде, тобто апроксимант Паде порядків $[N/N]$, $N=\overline{0,\infty}$, та $[N-1/N]$, $N=\overline{1,\infty}$.

§ 2. Класична проблема моментів

Одним з найбільш глибоких досягнень класичного періоду розвитку теорії апроксимацій Паде стало з'ясування їх тісних зв'язків з класичною проблемою моментів та теорією ланцюгових дробів. Започаткували цей напрямок російський математик П. Чебишев [106] та голандський математик Т. Стілтьєс [99], значний внесок було зроблено російським математиком А. Марковим [67], німецькими математиками Г. Гамбургером [169] та Ф. Хаусдорфом [170].

Означення 3. Класична проблема моментів на борелівській підмножині дійсної осі $\Delta\subset\mathbb{R}$ полягає у тому, щоб за заданою числовою послідовністю $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ визначити невід'ємну міру $d\mu$ на Δ, для якої виконувались би рівності

$$s_k=\int\limits_{\Delta} t^k d\mu(t),\quad k=\overline{0,\infty}. \tag{5}$$

Для функцій f, коефіцієнти степеневих розкладів яких можуть бути представлені у вигляді (5), їх апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$, $N\geq 1$ (тобто елементи першої піддіагоналі таблиці Паде) можуть бути побудовані в термінах многочленів, ортогональних на Δ за мірою $d\mu$, а саме, якщо позначити через $\{A_N(t)\}_{N=0}^{\infty}$ послідовність нетривіальних алгебраїчних многочленів таких, що

$$\int_{\Delta} A_N(t)A_M(t)d\mu(t) = 0 \quad \text{при} \quad M \neq N,$$

то

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = z^N A_N(1/z),$$

а

$$P_{N-1}(z) = z^{N-1} \int_{\Delta} \frac{A_N(1/z) - A_N(t)}{1/z - t} d\mu(t).$$

Дійсно, легко бачити, що

$$f(z)Q_N(z) - P_{N-1}(z) = z^N \int_{\Delta} \frac{A_N(1/z)}{1-zt} d\mu(t) -$$

$$-z^N \int_{\Delta} \frac{A_N(1/z) - A_N(t)}{1-zt} d\mu(t) = z^N \int_{\Delta} \frac{A_N(t)}{1-zt} d\mu(t) =$$

$$= z^N \int_{\Delta} \left\{ \frac{1}{1-zt} - 1 - zt - \ldots - z^{N-1}t^{N-1} \right\} A_N(t) d\mu(t) = O(z^{2N}) \quad \text{при} \quad z \to 0.$$

Ця обставина є визначальною для вивчення апроксимант Паде так званих марковських функцій, тобто функцій, зображуваних у вигляді:

$$f(z) = \int_{\Delta} \frac{d\mu(t)}{1-zt}. \tag{6}$$

Приклад ([16]). Послідовність коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z) = \frac{\arcsin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)} z^k, \ |z| \leq 1, \tag{7}$$

задовольняє класичну степеневу проблему моментів Хаусдорфа вигляду

$$s_k = \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!(2k+1)} = \int_0^1 t^k \sigma(t) dt, \tag{8}$$

де

$$\sigma(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-t}}{1-\sqrt{1-t}}\right).$$

Дійсно, користуючись властивостями бета-функції Ейлера [98, с.84], маємо

$$s_k = \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!(2k+1)} = \frac{1}{2k+1}\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}\cdot 2^k}{k!\cdot 2^k} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\pi\Gamma(k+1)(2k+1)} = \frac{1}{\pi(2k+1)}B\left(k+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi(2k+1)}\int\limits_0^1 t^{k-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{1}{t\sqrt{1-t}}\int\limits_0^t \tau^{k-\frac{1}{2}}d\tau dt = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{1-t}}\int\limits_0^\varepsilon \tau^{k-\frac{1}{2}}d\tau +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^1 \tau^{k-\frac{1}{2}}\int\limits_\tau^1 \frac{1}{t\sqrt{1-t}}dtd\tau.$$

Перший доданок припускає оцінку

$$\left|\int\limits_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{1-t}}\int\limits_0^\varepsilon \tau^{k-\frac{1}{2}}d\tau\right| \le \varepsilon^{k+\frac{1}{2}}\frac{1}{\varepsilon^r}B\left(r,\frac{1}{2}\right) \to 0$$

при $0 < r < k+\frac{1}{2}$ і $\varepsilon \to 0$, звідки і випливає справедливість формули (8). А тому на основі, наприклад, [113] можна зробити висновок про те, що послідовність апроксимант Паде $[N+M/N]_f(z)$, $M \ge -1$, $N \ge \max\{-M;0\}$ будуть збігатися до функції (7) при $N\to\infty$ рівномірно на кожному компакті з $\mathbb{C}\setminus[+1,\infty)$.

Дослідженню всього кола питань, пов'язаних з класичною проблемою моментів, присвячена монографія Н. Ахієзера [4]. В подальшому значний внесок в вивчення апроксимант Паде марковських функцій, зокрема, у випадках, коли підмножина Δ є необмеженою або є об'єднанням кількох сегментів дійсної осі, що взаємно не перетинаються, було зроблено А. Гончаром [36], Є. Рахмановим [82-84], К. Лунгу [65], Я. Гілевичем [184], Ю. Люком [201], Дж. Бейкером [120], В. Гаучі [162], П. Вінном [234] та ін. В роботах Е. Хендріксена та Г. ван Россума [171,172], Дж. Натолла та С. Сінгха [211], Г. Шталя [223] та ін. отримано ряд результатів, що стосуються поведінки апроксимант Паде функцій вигляду (6) у випадку знакозмінної або ж комплексної міри $d\mu$, а також у випадку, коли Δ є підмножиною комплексної площини.

Що ж стосується функцій, не зображуваних у вигляді (6), то потрібно в першу чергу вказати на дослідження Р. Армса та А. Едрея [118,157-160] апроксимацій Паде частотних рядів Пойа, що є твірними функціями цілком позитивних послідовностей, а також дослідження апроксимацій Паде ряду окремих спеціальних функцій, виконані Ю. Люком [66,198,199]. Див.також [12,42,56,63,71,103,104,125,138,174,185,188,190-193,195-197,203,205,206,216,224-227,232,233].

§ 3. Попередні дані про лінійні простори та лінійні оператори

Наведемо необхідні в подальшому відомості з функціонального аналізу.

Означення 4 [88, с.11]. Множина $\mathscr{X}$ називається лінійним простором над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$ (або ж комплексним лінійним простором), якщо в ній визначені дві операції - додавання та множення на скаляри, які мають наступні властивості:

i) кожній парі елементів $x, y \in \mathscr{X}$ співставлено елемент $x+y \in \mathscr{X}$, причому для кожних $x, y, z \in \mathscr{X}$ виконуються співвідношення $x + y = y + x$ і $x + (y + z) = (x + y) + z$; в $\mathscr{X}$ існує єдиний елемент 0 такий, що $x + 0 = x$ для кожного $x \in \mathscr{X}$; для кожного $x \in \mathscr{X}$ існує єдиний елемент $-x$ такий, що $x + (-x) = 0$;

ii) кожній парі (α, x), де $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in \mathscr{X}$, співставлено елемент $\alpha x \in \mathscr{X}$, причому $1 \cdot x = x$, $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ для кожних $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ та кожного $x \in \mathscr{X}$;

iii) виконуються два дистрибутивних закони $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ та $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ для кожних $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ та кожних $x, y \in \mathscr{X}$.

Означення 5 [88, с.9]. Комплексний лінійний простір $\mathscr{X}$ називається нормованим, якщо кожному елементу $x \in \mathscr{X}$ співставлено невід'ємне дійсне число $\|x\|$, що називається нормою елемента x, так що виконуються наступні умови:

i) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для кожних $x, y \in \mathscr{X}$ (нерівність трикутника);

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ для кожного $x \in \mathscr{X}$ та кожного $\alpha \in \mathbb{C}$;

iii) $\|x\| > 0$, якщо тільки $x \neq 0$.

Означення 6 [88, с.329]. Комплексний лінійний простір $\mathscr{H}$ називається унітарним простором, якщо кожній впорядкованій парі елементів $x, y \in \mathscr{H}$ співставлено комплексне число (x, y), що називається скалярним добутком, причому для кожних $x, y, z \in \mathscr{H}$ і кожного $\alpha \in \mathbb{C}$ виконуються наступні умови:

i) $(y, x) = \overline{(x, y)}$ (верхня риска є знаком комплексного спряження $\overline{\alpha} = \Re\alpha - i\Im\alpha$);

ii) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

iii) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;

iv) $(x, x) \geq 0$;

v) $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

В кожному унітарному просторі величина

$$\|x\| = (x, x)^{1/2},$$

як неважко переконатися, визначає норму.

Означення 7 [88, с.20]. Оператор $A : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, що переводить комплексний лінійний простір $\mathscr{X}$ в комплексний лінійний простір $\mathscr{Y}$, називається лінійним, якщо для кожних $x, y \in \mathscr{X}$ та кожних $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Якщо $\mathscr{Y}$ співпадає з полем скалярів $\mathbb{C}$, то лінійний оператор $A : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ називається лінійним функціоналом.

Означення 8 [8, с.242]. Лінійний оператор $A : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, що переводить нормований лінійний простір $\mathscr{X}$ в нормований лінійний простір $\mathscr{Y}$, називається неперервним (або ж обмеженим), якщо існує константа $C > 0$ така, що для кожного $x \in \mathscr{X}$

$$\|Ax\| \leq C\|x\|.$$

При цьому величина

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|},\ x \in \mathscr{X}, x \neq 0\right\} = \sup\{\|Ax\| :\ \|x\| = 1\} \tag{9}$$

називається нормою лінійного неперервного оператора A.

Нехай $\mathscr{X}$ - нормований лінійний простір. Позначимо через $\mathscr{X}^*$ сукупність всіх лінійних неперервних функціоналів на $\mathscr{X}$. В $\mathscr{X}^*$ природним шляхом вводиться структура лінійного простору, а саме:

i) для кожних $l_1, l_2 \in \mathscr{X}^*$ і кожного $x \in \mathscr{X}$

$$(l_1 + l_2)(x) = l_1(x) + l_2(x);$$

ii) для кожного $l \in \mathscr{X}^*$, кожного $x \in \mathscr{X}$ та кожного $\alpha \in \mathbb{C}$

$$(\alpha l)(x) = \alpha l(x).$$

Якщо в $\mathscr{X}^*$ ввести норму за формулою (9), то, як неважко впевнитися, вона буде задовольняти всі умови, вказані в означенні 5.

Означення 9 [8, с.198]. Нехай $\mathscr{X}$ - нормований лінійний простір. Тоді нормований лінійний простір $\mathscr{X}^*$ лінійних неперервних функціоналів на $\mathscr{X}$ називається спряженим до простору $\mathscr{X}$.

Означення 10 [8, с.163]. Послідовність $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ елементів нормованого лінійного простору $\mathscr{X}$ називається фундаментальною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує $N \in \mathbb{N}$ таке, що $\forall k, j \geq N$ виконуються нерівності $\|x_k - x_j\| < \varepsilon$.

Означення 11 [8, с.163]. Нормований лінійний простір $\mathscr{X}$ називається повним, якщо в ньому кожна фундаментальна послідовність $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ збігається до деякого елемента $x \in \mathscr{X}$, тобто існує $x \in \mathscr{X}$ таке, що $\|x_k - x\| \to 0$ при $k \to \infty$.

Повний нормований лінійний простір називається також банаховим простором. Повний унітарний простір називається гільбертовим простором. Елементи x, y гільбертового простору $\mathscr{H}$ називаються ортогональними, якщо $(x, y) = 0$. При цьому пишуть $x \perp y$. Система елементів $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ гільбертового простору $\mathscr{H}$ називається ортогональною, якщо будь-які два елементи цієї системи є ортогональними. Якщо, крім цього, норма кожного елемента x_α дорівнює 1, то система $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ називається ортонормованою.

Гільбертів простір називається сепарабельним, якщо в ньому існує зліченна скрізь щільна множина. Відомо [59, с.171], що ортонормована система $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ сепарабельного гільбертового простору $\mathscr{H}$ є не більш ніж зліченною. Якщо сепарабельний гільбертів простір $\mathscr{H}$ є нескінченновимірним, то в ньому існує повна зліченна ортонормована система.

Означення 12 [88, с.62]. Білінійною формою, визначеною на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$, називається відображення, яке кожній парі елементів $x\in\mathscr{X}$ та $y\in\mathscr{Y}$ ставить у відповідність комплексне число $\langle x,y\rangle$, причому

i) для кожних $x_1,x_2\in\mathscr{X}$, кожного $y\in\mathscr{Y}$ та кожних $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}$

$$\langle\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,y\rangle=\alpha_1\langle x_1,y\rangle+\alpha_2\langle x_2,y\rangle\,;$$

ii) для кожного $x\in\mathscr{X}$, кожних $y_1,y_2\in\mathscr{Y}$ та кожних $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}$

$$\langle x,\alpha_1y_1+\alpha_2y_2y\rangle=\alpha_1\langle x,y_1\rangle+\alpha_2\langle x,y_2\rangle\,.$$

Очевидно, що якщо $\mathscr{X}$ - банахів простір, а $\mathscr{X}^*$ - спряжений до нього простір лінійних неперервних функціоналів на $\mathscr{X}$, то форма

$$\langle x,y\rangle=y(x),$$

де $x\in\mathscr{X}$, $y\in\mathscr{X}^*$, а $y(x)$ - значення функціонала $y\in\mathscr{X}^*$ на елементі $x\in\mathscr{X}$, є білінійною формою на добутку просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{X}^*$. Якщо $\mathscr{H}$ - гільбертів простір, то скалярний добуток в ньому $(.,.)$ є формою лінійною за першою змінною і антилінійною (або ж півлінійною) за другою змінною, тобто для кожних $x,y_1,y_2\in\mathscr{H}$ і кожних $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C}$

$$(x,\alpha_1y_1+\alpha_2y_2y)=\overline{\alpha_1}\langle x,y_1\rangle+\overline{\alpha_2}\langle x,y_2\rangle\,.$$

Така форма називається півторалінійною. Якщо $\{e_k\}_{k=0}^\infty$ - повна ортонормована система в $\mathscr{H}$, то кожний елемент $x\in\mathscr{H}$ розкладається в збіжний ряд Фур'є за цією системою [59, с.174]

$$x=\sum_{k=0}^\infty(x,e_k)e_k.$$

Таким чином, в нескінченновимірному гільбертовому просторі $\mathscr{H}$ можна визначити білінійну форму

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=0}^\infty(x,e_k)(y,e_k).$$

Очевидно, що $\forall x, y \in \mathscr{H}$

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |(x, e_k)| \cdot |(y, e_k)| \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

і, отже, білінійна форма $\langle x, y\rangle$ приймає скінченні значення $\forall x, y \in \mathscr{H}$.

Означення 13 [8, с.276-277]. Нехай $\mathscr{X}$ - нормований лінійний простір, $A : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ - лінійний обмежений оператор. Регулярною точкою оператора A називається точка $z \in \mathbb{C}$ така, що оператор $A - zI$ має обернений (через I позначається тотожний оператор $I : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, так що для кожного $x \in \mathscr{X}$ $Ix = x$). Доповнення до множини $\rho(A)$ всіх регулярних точок оператора A називається спектром оператора A і позначається через $S(A)$. В кожній регулярній точці $z \in \mathbb{C}$ оператор $R_z(A) = (A - zI)^{-1}$ називається резольвентою оператора A.

Якщо $\frac{1}{z}$ є регулярною точкою оператора A, ми будемо позначати

$$R_z^{\#}(A) = (I - zA)^{-1} = -\frac{1}{z} R_{\frac{1}{z}}(A)$$

і називати $R_z^{\#}(A)$ резольвентною функцією оператора A.

Означення 14 [8, с.302]. Спектральним радіусом лінійного обмеженого оператора A називається число

$$\rho_A = \max\{|z| : \ z \in S(A)\}.$$

Для ρ_A справедлива формула [8, с.302]

$$\rho_A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}.$$

Очевидно, що при $|z| < \frac{1}{\rho_A}$ резольвентна функція $R_z^{\#}(A)$ буде аналітичною, а якщо $\rho_A = 0$, то $R_z^{\#}(A)$ буде цілою функцією.

§ 4. Узагальнені моментні зображення

Наприкінці 70-х рр. XX сторіччя В.К. Дзядик на основі подальшого розвитку запропонованого ним апроксимаційного методу наближеного розв'язування звичайних лінійних диференціальних рівнянь [10,47,52,53,55] з'ясував, що в ряді випадків застосування вказаного методу до побудови раціональних наближень призводить до отримання діагональних поліномів Паде деяких елементарних функцій. В роботі [56] В.К. Дзядиком та Л.І. Філозофом була вивчена асимптотична поведінка діагональних апроксимант Паде функцій e^z та $(1+z)^{\alpha}$, а згодом в роботі [49] В.К. Дзядиком була досліджена асимптотика діагональних апроксимант Паде функцій $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ та $\operatorname{ch} z$ і встановлено зв'язок між раціональними апроксимантами та біортогональними системами функцій. Аналіз отриманих результатів і співставлення їх з існуючою глибокою теорією класичної проблеми моментів дозволили В.К. Дзядику в роботі [50] сформулювати задачу про узагальнені моментні зображення.

Означення 15. Узагальненим моментним зображенням числової послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ називається двопараметрична сукупність рівностей

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty}, \tag{10}$$

де $x_k \in \mathscr{X}$, $k = \overline{0, \infty}$, $y_j \in \mathscr{Y}$, $j = \overline{0, \infty}$, а $\langle ., . \rangle$ - білінійна форма, визначена на $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.

Будемо говорити, що узагальнене моментне зображення вигляду (10) визначене на банаховому просторі $\mathscr{X}$, якщо $x_k \in \mathscr{X}$, $k = \overline{0, \infty}$, $y_j \in \mathscr{X}^*$, $j = \overline{0, \infty}$, і $\langle x, y \rangle = y(x)$, де $y(x)$ - значення функціоналу $y \in \mathscr{X}^*$ на елементі $x \in \mathscr{X}$.

Легко бачити, що, якщо в (10) покласти $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = \mathscr{L}_2[\Delta, d\mu]$ – гільбертів простір функцій, сумовних з квадратом за мірою $d\mu$ на множині $\Delta \subset \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = \int\limits_{\Delta} x(t)y(t)d\mu(t)$, за елементи x_k вибрати функції $x_k(t) = t^k$, $k = \overline{0, \infty}$, а за елементи y_j вибрати функції $y_j(t) = t^j$, $j = \overline{0, \infty}$, то ми отримаємо зображення, еквівалентне класичній проблемі моментів (5).

У випадку, коли в просторі $\mathscr{X}$ існує лінійний оператор $A: \ \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ такий, що

$$Ax_k = x_{k+1}, \quad k = \overline{0, \infty}, \tag{11}$$

а у просторі $\mathscr{Y}$ існує лінійний оператор $A^*: \ \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}$ такий, що

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle \ \forall x \in \mathscr{X}, \ y \in \mathscr{Y},$$

(будемо називати оператор A^* спряженим до оператора A відносно білінійної форми $\langle , ., \rangle$) зображення (10) еквівалентне зображенню

$$s_k = \langle A^k x_0, y_0 \rangle, \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{12}$$

При цьому функція f вигляду (1) при додаткових припущеннях про збіжність рядів буде мати зображення:

$$f(z) = \langle R_z^{\#}(A) x_0, y_0 \rangle, \tag{13}$$

де $R_z^{\#}(A) = (I - zA)^{-1}$ – резольвентна функція оператора A.

§ 5. Застосування узагальнених моментних зображень до побудови апроксимацій Паде

В основі всіх застосувань узагальнених моментних зображень до апроксимацій Паде лежить наступний результат, встановлений В.К. Дзядиком [50].

Теорема 1. Нехай f - формальний степеневий ряд вигляду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k, \tag{14}$$

і нехай

а) для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty}; \tag{15}$$

б) при деякому $N \in \mathbb{N}$ визначник Ганкеля $H_{N-1} = H_{0,N-1} = \det ||s_{k+j}||_{k,j=0}^{N-1}$ цієї послідовності є відмінним від нуля.

Тоді для формального степеневого ряду f існує його апроксиманта Паде порядку $[N-1/N]$, і ця апроксиманта може бути записана у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)}, \tag{16}$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j}, \tag{17}$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{j=1}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{m=0}^{j-1} s_m z^m, \tag{18}$$

а коефіцієнти $c_j^{(N)}$, $j = \overline{0, N}$, визначаються зі співвідношень біортогональності для узагальненого полінома $Y_N = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} y_j$ вигляду:

$$\langle x_k, Y_N \rangle = 0, \quad k = \overline{0, N-1}, \tag{19}$$

або ж зі співвідношень біортогональності для узагальненого полінома $X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_k$ вигляду:

$$\langle X_N, y_j \rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1}. \tag{20}$$

У випадку, коли простори $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ є нормованими, і мають місце зображення (12)–(13) з лінійним обмеженим оператором A, резольвентна функція якого є аналітичною в деякій області $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$, що містить початок координат, похибка апроксимації Паде $\forall z \in \mathscr{D}$ може бути зображена у вигляді:

$$f(z) - [N-1/N]_f(z) = \frac{z^{2N}}{Q_N(z)} \left\langle R_z^{\#}(A) x_N, Y_N \right\rangle =$$

$$= \frac{z^{2N}}{Q_N(z)} \left\langle R_z^{\#}(A) X_N, y_N \right\rangle. \tag{21}$$

Доведення. При деякому натуральному $\omega \geq 2N$ просумуємо рівності (15) по k від 0 до ω, попередньо помноживши ці рівності на z^k. В лівій частині отримаємо

$$\sum_{k=0}^{\omega} s_{k+j} z^k = \frac{1}{z^j} \sum_{k=j}^{\omega+j} s_k z^k = \frac{1}{z^j} \left\{ \sum_{k=0}^{\omega+j} s_k z^k - \sum_{k=0}^{j-1} s_k z^k \right\}. \tag{22}$$

В правій частині будемо мати

$$\sum_{k=0}^{\omega} \langle x_k, y_j \rangle z^k = \left\langle \sum_{k=0}^{\omega} x_k z^k, y_j \right\rangle. \tag{23}$$

Побудуємо тепер нетривіальний узагальнений поліном $Y_N = \sum\limits_{j=0}^{N} c_j^{(N)} y_j$, для якого виконуються умови біортогональності (19) (за умови, що $H_{N-1} \neq 0$, такий поліном обов'язково існує), і, виходячи з його коефіцієнтів, помножимо (22) та (23) на $c_j^{(N)}$ і просумуємо по j від 0 до N. Отримаємо

$$\sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} \frac{1}{z^j} \left\{ \sum_{k=0}^{\omega+j} s_k z^k - \sum_{k=0}^{j-1} s_k z^k \right\} =$$

$$= \frac{1}{z^N} \left\{ Q_N(z) f(z) - P_{N-1}(z) \right\} - \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{-j} \sum_{k=\omega+j+1}^{\infty} s_k z^k,$$

а також

$$\sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} \left\langle \sum_{k=0}^{\omega} x_k z^k, y_j \right\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\omega} x_k z^k, Y_N \right\rangle = \left\langle \sum_{k=N}^{\omega} x_k z^k, Y_N \right\rangle = z^N \left\langle \sum_{k=0}^{\omega} x_{k+N} z^k, Y_N \right\rangle.$$

В результаті будемо мати

$$f(z) - \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)} = \frac{z^{2N}}{Q_N(z)} \left\langle \sum_{k=0}^{\omega} x_{k+N} z^k, Y_N \right\rangle + \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{\omega+j+1}^{\infty} s_k z^k. \tag{24}$$

Враховуючи, що при $\omega \geq 2N$

$$\sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{k=\omega+j+1}^{\infty} s_k z^k = O(z^{\omega+1}) = o(z^{2N}) \quad \text{при} \quad z \to 0,$$

і що за умов теореми

$$Q_N(0) = c_N^{(N)} \neq 0,$$

отримаємо перше твердження теореми.

Для того, щоб отримати формулу для похибки апроксимації, треба в рівності (24) перейти до границі при $\omega \to \infty$ і врахувати аналітичність обох частин при $z \in \mathscr{D}$.

Аналогічним чином можна побудувати діагональні та наддіагональні поліноми Паде формального степеневого ряду вигляду (1), а саме в [54] було встановлено наступний результат.

Теорема 2. Нехай f - формальний степеневий ряд вигляду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k,$$

і нехай

а) для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty};$$

б) при деяких $N \in \mathbb{N}$ та $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ визначник Ганкеля $H_{M+1,N-1} = \det ||s_{k+j+M+1}||_{k,j=0}^{N-1}$ цієї послідовності є відмінним від нуля.

Тоді для формального степеневого ряду f існує його апроксиманта Паде порядку $[N + M/N]$, і ця апроксиманта може бути записана у вигляді

$$[N + M/N]_f(z) = \frac{P_{N+M}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j},$$

$$P_{N+M}(z) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{m=0}^{j+M} s_m z^m,$$

а коефіцієнти $c_j^{(N)}$, $j = \overline{0, N}$, визначаються зі співвідношень біортогональності для узагальненого полінома $Y_N = \sum\limits_{j=0}^{N} c_j^{(N)} y_j$ вигляду:

$$\langle x_{k+M+1}, Y_N \rangle = 0, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

У випадку, коли простори $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ є нормованими, і мають місце зображення (12)–(13) з лінійним обмеженим оператором A, резольвентна функція якого є аналітичною в деякій області $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$, що містить початок координат, похибка апроксимації Паде $\forall z \in \mathscr{D}$ може бути зображена у вигляді:

$$f(z) - [N + M/N]_f(z) = \frac{z^{2N+M+1}}{Q_N(z)} \left\langle R_z^{\#}(A) x_{N+M+1}, Y_N \right\rangle.$$

Доведення. Щоб встановити справедливість тверджень теореми 2, досить повторити міркування, використані при доведенні теореми 1, виходячи з зображення

$$s_{k+j+M+1} = \langle x_{k+M+1}, y_j \rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty}.$$

Таким чином, задача побудови апроксимант Паде з використанням узагальнених моментних зображень зводиться до задачі побудови біортогональних поліномів. В цілій низці випадків це дозволяє не тільки побудувати, але і дослідити поведінку елементів першої піддіагоналі, діагоналі та наддіагональних послідовностей таблиці Паде ряду спеціальних функцій. Разом з тим потрібно констатувати, що задача побудови біортогональних поліномів є набагато складнішою, ніж побудова ортогональних многочленів, і не може бути розв'язана в загальному випадку.

§ 6. Теореми існування для узагальнених моментних зображень

В [54] В.К. Дзядиком та автором був встановлений наступний результат.

Теорема 3. Нехай $\mathscr{H}$ – нескінченновимірний гільбертів простір і $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ – довільна ортонормована послідовність в ньому. Тоді для того, щоб числова послідовність $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ мала в $\mathscr{H}$ узагальнене моментне зображення вигляду:

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty}, \tag{25}$$

де

$$\langle x, y \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} (x, e_m)(y, e_m),$$

а елементи x_k, $k = \overline{0, \infty}$, та y_j, $j = \overline{0, \infty}$, мають вигляд

$$x_k = \sum_{m=0}^{k} \alpha_m^{(k)} e_m, \quad y_j = \sum_{m=0}^{j} \beta_m^{(j)} e_m, \tag{26}$$

і при цьому $\alpha_k^{(k)} \neq 0$, $k = \overline{0, \infty}$, $\beta_j^{(j)} \neq 0$, $j = \overline{0, \infty}$, необхідно і достатньо, щоб всі визначники Ганкеля

$$H_N := H_{0,N} = \det \| s_{k+j} \|_{k,j=0}^{N}$$

послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ були відмінними від 0.

Доведення. Припустимо, що зображення (25) існує. Тоді

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle = \left\langle \sum_{m=0}^{k} \alpha_m^{(k)} e_m, \ \sum_{m=0}^{j} \beta_m^{(j)} e_m \right\rangle = \sum_{m=0}^{\min\{k,j\}} \alpha_m^{(k)} \beta_m^{(j)}, \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{27}$$

Розглянемо при кожному $N = \overline{0, \infty}$ дві трикутні матриці

$$A_N = \begin{pmatrix} \alpha_0^{(0)} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_0^{(1)} & \alpha_1^{(1)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_0^{(N)} & \alpha_1^{(N)} & \cdots & \alpha_N^{(N)} \end{pmatrix}$$

та

$$B_N = \begin{pmatrix} \beta_0^{(0)} & \beta_0^{(1)} & \ldots & \beta_0^{(N)} \\ 0 & \beta_1^{(1)} & \ldots & \beta_1^{(N)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \beta_N^{(N)} \end{pmatrix}.$$

Неважко помітити, що рівності (27) еквівалентні рівностям

$$S_N = A_N B_N, \quad N = \overline{0, \infty},$$

де

$$S_N = \|s_{k+j}\|_{k,j=0}^N = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_N \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_{N+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_N & s_{N+1} & \cdots & s_{2N} \end{pmatrix}, \quad N = \overline{0, \infty},$$

і, отже,

$$H_N = \det\, S_N = \det A_N \cdot \det B_N = \prod_{k=0}^N \alpha_k^{(k)} \cdot \prod_{j=0}^N \beta_j^{(j)} \neq 0.$$

Щоб довести достатність умов теореми, приймемо до уваги наступний результат.

Теорема 4 [14, с. 50]. Кожну невироджену матрицю C можна зобразити у вигляді добутку нижньої трикутної матриці A на верхню трикутну матрицю B :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

При цьому, якщо позначити послідовні головні мінори матриці C через D_1, D_2, $\ldots$, D_n, то будуть виконуватись рівності

$$a_{11}b_{11} = D_1, \quad a_{22}b_{22} = \frac{D_2}{D_1}, \cdots, \quad a_{nn}b_{nn} = \frac{D_n}{D_{n-1}}. \tag{28}$$

Діагональним елементам матриць A та B можна задавати будь–які значення, що задовольняють (28). Після цього решта елементів матриць A та B визначаються однозначно за формулами:

$$a_{mk} = a_{kk}\frac{C\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 & m \\ 1 & 2 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix}}{C\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}},$$

$$b_{jm} = b_{jj}\frac{C\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j-1 & j \\ 1 & 2 & \dots & j-1 & m \end{pmatrix}}{C\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j \\ 1 & 2 & \dots & j \end{pmatrix}},$$

де через $C\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_s \\ r_1 & r_2 & \dots & r_s \end{pmatrix}$ позначаються мінори матриці C :

$$C\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_s \\ r_1 & r_2 & \dots & r_s \end{pmatrix} = \det\|c_{p_k,r_j}\|_{k,j=0}^{s}.$$

Припустимо тепер, що числова послідовність $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ така, що $H_N = \det\|s_{k+j}\|_{k,j=0}^{n} \neq 0$ $\forall N = \overline{0,\infty}$. Виберемо числові послідовності $\alpha_k^{(k)}$, $k = \overline{0,\infty}$, та $\beta_j^{(j)}$, $j = \overline{0,\infty}$, таким чином, щоб виконувались рівності

$$\alpha_0^{(0)}\beta_0^{(0)} = H_0, \quad \alpha_1^{(1)}\beta_1^{(1)} = \frac{H_1}{H_0}, \cdots, \alpha_N^{(N)}\beta_N^{(N)} = \frac{H_N}{H_{N-1}}, \cdots,$$

і покладемо

$$\alpha_j^{(m)} = \alpha_k^{(k)}\frac{S\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k-1 & m \\ 0 & 1 & \dots & k-1 & k \end{pmatrix}}{H_k},$$

$$b_j^{(m)} = \beta_j^{(j)}\frac{S\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & j-1 & j \\ 0 & 1 & \dots & j-1 & m \end{pmatrix}}{H_j},$$

при $k, j = \overline{0,m}$, $m = \overline{0,\infty}$. Зафіксуємо в просторі $\mathscr{H}$ довільну ортонормовану послідовність $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ і покладемо

$$x_k = \sum_{m=0}^{k} \alpha_m^{(k)} e_m, \quad k = \overline{0,\infty},$$

$$y_j = \sum_{m=0}^{j} \beta_m^{(j)} e_m, \quad j = \overline{0,\infty}.$$

Враховуючи твердження теореми 4, робимо висновок, що так вибрані послідовності $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ та $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$ задовольняють рівності (27). Теорема 3 таким чином доведена.

Зауваження 1. Поскільки відмінність від нуля визначників Ганкеля послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ є необхідною умовою існування та невиродженості елементів першої піддіагоналі таблиці Паде функції $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z_k$ (див. [5, с. 17]), то тим самим теорема 3 стверджує, що узагальнені моментні зображення послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ можуть бути побудовані кожного разу, коли існують та невироджені апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, функції $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$. Зазначимо, що для існування зображень вигляду (5) необхідною є позитивність всіх визначників Ганкеля H_N, $N = \overline{0,\infty}$, послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Зауваження 2. В процесі доведення теореми 3 ми мали змогу переконатися, що кожного разу, коли виконані її умови, узагальнені моментні зображення навіть при фіксації простору $\mathscr{H}$, ортонормованої послідовності $\{e_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathscr{H}$ і вигляду (26) елементів x_k, $k = \overline{0,\infty}$, та y_j, $j = \overline{0,\infty}$, можуть бути побудовані неоднозначно.

Перейдемо тепер до з'ясування умов існування зображень вигляду (12)–(13). Має місце наступний результат.

Теорема 5. Для будь-якої функції f, аналітичної в крузі $K_R = \{z : \ |z| \leq R\}$, $0 < R < \infty$, та будь-якого нескінченновимірного сепарабельного гільбертового простору $\mathscr{H}$ існують елементи $x_0, y_0 \in \mathscr{H}$ та лінійний обмежений оператор $A : \ \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, норма якого є меншою за $1/R$, і такий що $\forall z \in K_R$

$$f(z) = (R_z^{\#}(A)x_0, y_0). \tag{29}$$

Доведення. Нехай функція f зображувана степеневим рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k.$$

За умов теореми

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|s_k|} < \frac{1}{R+\varepsilon}, \tag{30}$$

де $\varepsilon > 0$. Зафіксуємо деяке число R_1 таке, що $R < R_1 < R + \varepsilon$, і для довільного ортонормованого базису $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ простору $\mathscr{H}$ розглянемо послідовність елементів

$$x_k = \frac{1}{R_1^k} e_k, \ k = \overline{0,\infty}.$$

Визначимо на елементах базису $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ лінійний обмежений оператор A:

$$Ae_k = \frac{1}{R_1} e_{k+1}, \ k = \overline{0,\infty}.$$

Легко бачити, що, по-перше

$$Ax_k = x_{k+1},\ k = \overline{0,\infty},$$

а по-друге,

$$||A|| = \frac{1}{R_1} < \frac{1}{R}.$$

Визначимо тепер елемент $y_0 \in \mathscr{H}$ у вигляді суми наступного ряду:

$$y_0 = \sum_{m=0}^{\infty} R_1^m \overline{s}_m e_m.$$

Переконаємося, що $y_0 \in \mathscr{H}$. Дійсно

$$||y_0||^2 = \sum_{m=0}^{\infty} R^{2m} |s_m|^2. \tag{31}$$

З (30) випливає, що, починаючи з деякого $k_0 \in \mathbb{N}$,

$$|s_k| \leq \frac{1}{(R + \varepsilon - \varepsilon_1)^k},$$

де $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$, а отже, ряд в правій частині (31) є збіжним. Таким чином, $y_0 \in \mathscr{H}$. З іншого боку,

$$(x_k, y_0) = \left(\frac{1}{R_1^k} e_k, \sum_{m=0}^{\infty} R_1^m \overline{s}_m e_m \right) = s_k,\ k = \overline{0,\infty},$$

а отже, є справедливим зображення (29).

Аналогічний результат можна встановити і у випадку цілих функцій.

Теорема 6. Для будь–якої цілої функції f та будь–якого нескінченновимірного сепарабельного гільбертового простору $\mathscr{H}$ існують елементи $x_0, y_0 \in \mathscr{H}$ та лінійний обмежений оператор $A:\ \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ з нульовим спектральним радіусом такий, що $\forall z \in \mathbb{C}$

$$f(z) = (R_z^{\#}(A)x_0, y_0). \tag{32}$$

Доведення. Нехай функція f зображувана степеневим рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k.$$

З умов теореми випливає, що

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|s_k|} = 0.$$

Покладемо

$$\delta_k = \sup_{k \geq j} \sqrt[j]{|s_j|}.$$

Очевидно, що $\{\delta_k\}_{k=0}^{\infty}$ є монотонно спадаючою, прямуючою до нуля послідовністю. Для довільного ортонормованого базису $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ простору $\mathscr{H}$ і довільного $\lambda > 1$ розглянемо послідовність елементів

$$x_k = (\lambda\delta_k)^k e_k,\ k = \overline{0,\infty},$$

і визначимо на елементах базису $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ лінійний обмежений оператор A:

$$Ae_k = \lambda\frac{\delta_{k+1}^{k+1}}{\delta_k^k}e_{k+1},\ k = \overline{0,\infty}.$$

Легко бачити, що

$$Ax_k = x_{k+1},\ k = \overline{0,\infty}.$$

З іншого боку, оскільки

$$A^m e_k = \lambda^m\frac{\delta_{k+m}^{k+m}}{\delta_k^k}e_{k+m},\ k = \overline{0,\infty},$$

то

$$||A^m|| = \sup_k \lambda^m\frac{\delta_{k+m}^{k+m}}{\delta_k^k} = \sup_k\left(\frac{\delta_{k+m}}{\delta_k}\right)^k(\lambda\delta_{k+m})^m \leq (\lambda\delta_{k+m})^m,$$

а отже,

$$\sqrt[m]{||A^m||} \leq \lambda\delta_{k+m} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Таким чином, оператор A має нульовий спектральний радіус. Визначимо тепер елемент $y_0 \in \mathscr{H}$ у вигляді суми наступного ряду:

$$y_0 = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(\lambda\delta_m)^m}s_m e_m.$$

Очевидно,

$$||y_0||^2 = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(\lambda\delta_m)^{2m}}|s_m|^2 \leq \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^{2m}} = \frac{1}{1-\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1} < \infty,$$

отже, $y_0 \in \mathscr{H}$. З іншого боку,

$$(x_k, y_0) = \left((\lambda\delta_k)^k e_k, \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(\lambda\delta_m)^m}s_m e_m\right) = s_k,\ k = \overline{0,\infty},$$

а отже є справедливим зображення (32).

Зауваження 3. Теореми 5-6 незалежно іншим способом були встановлені Г.В. Радзієвським [81].

Зауваження 4. В теоремах 5-6 встановлено існування зображень для функцій f у вигляді (29), (32), тобто в термінах скалярного добутку, який, як було зазначено раніше, є півторалінійною формою. Трансформація цих зображень в зображення в термінах білінійних форм є очевидною.

Р О З Д І Л 2
ПОБУДОВА УЗАГАЛЬНЕНИХ МОМЕНТНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ТА СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

§ 1. Узагальнені моментні зображення з операторами інтегрування

Ми вже зазначали, що зображення послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ у вигляді степеневих моментів деякої міри (1.5), або, що те ж саме, зображення функції $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$ у вигляді інтеграла Маркова-Стілтьєса (1.6) можна розглядати як частинний випадок узагальненого моментного зображення (1.10), (1.12), (1.13). Зауважимо, що в цьому випадку за лінійний оператор (1.11) вибирається оператор множення на незалежну змінну

$$(A\varphi)(t) = t\varphi(t).$$

Розглянемо ряд узагальнених моментних зображень, які не зводяться до вказаного випадку і тим самим дозволяють будувати та досліджувати апроксиманти Паде функцій, що не є марковськими.

В просторі інтегровних на відрізку $[0,1]$ функцій $\mathscr{X} = L[0,1]$ розглянемо лінійний обмежений оператор

$$(A\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau. \tag{1}$$

Щоб підрахувати резольвентну функцію оператора (1), розглянемо лінійне інтегральне рівняння

$$\left((I - zA)\varphi\right)(t) = \varphi(t) - z\int_0^t \varphi(\tau)d\tau = \psi(t).$$

Продиференціюємо це рівняння за змінною t. Отримаємо:

$$\varphi'(t) - z\varphi(t) = \psi'(t).$$

За схемою методу варіації довільної сталої покладемо

$$\varphi(t) = C(t)e^{zt}.$$

Дістанемо

$$C'(t) = \psi'(t)e^{-zt},$$

звідки шляхом нескладних перетворень будемо мати

$$\varphi(t) = \psi(t) + z\int_0^t \psi(\tau)e^{z(t-\tau)}d\tau.$$

Таким чином

$$\left(R_z^{\#}(A)\varphi\right)(t) = \varphi(t) + z\int\limits_0^t \varphi(\tau)e^{z(t-\tau)}d\tau. \tag{2}$$

Степені оператора (1) можуть бути, як легко переконатися, записані у вигляді

$$(A^k\varphi)(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\varphi(\tau)d\tau, \quad k = \overline{1,\infty}. \tag{3}$$

Покладемо тепер $\mathscr{Y} = C[0,1]$ і розглянемо на добутку просторів $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ білінійну форму

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt. \tag{4}$$

Неважко впевнитись, що оператор $A^* : \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}$ вигляду

$$(A^*\psi)(t) = \int\limits_t^1 \psi(\tau)d\tau$$

є спряженим до оператора (1) відносно білінійної форми (4). Степені спряженого оператора мають вигляд:

$$(A^{*j}\psi)(t) = \int\limits_t^1 \frac{(\tau-t)^{j-1}}{(j-1)!}\psi(\tau)d\tau, \quad j = \overline{1,\infty}.$$

Покладемо тепер $x_0(t) \equiv 1$, $y_0(t) \equiv 1$. Тоді

$$s_k = \int\limits_0^1 (A^k x_0)(t)y_0(t)dt = \int\limits_0^1 \frac{t^k}{k!}dt = \frac{1}{(k+1)!},$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \frac{e^z - 1}{z}.$$

Встановлено наступний результат.

Теорема 1 [17]. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k = \frac{1}{(k+1)!}, \; k = \overline{0,\infty},$$

коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \frac{e^z - 1}{z}$$

має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $L[0,1]\times C[0,1]$ вигляду

$$s_{k+j}=\frac{1}{(k+j+1)!}=\int\limits_0^1\frac{t^k}{k!}\cdot\frac{(1-t)^j}{j!}dt,\ k,j=\overline{0,\infty}. \tag{5}$$

Залишимо тепер $y_0(t)\equiv 1$ і покладемо $x_0(t)=t^\nu$, $\nu>-1$. Отримаємо

$$s_k=\int\limits_0^1(A^kx_0)(t)dt=\int\limits_0^1\int\limits_0^t\frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!}\tau^\nu d\tau dt=\int\limits_0^1\frac{t^{k+\nu}}{(\nu+1)(\nu+2)\cdot\ldots\cdot(\nu+k)}dt=$$

$$=\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)\cdot\ldots\cdot(\nu+k+1)}=\frac{1}{(\nu+1)_{k+1}},\quad k=\overline{0,\infty},$$

де через $(\alpha)_k$ позначено символ Похгаммера:

$$(\alpha)_k:=\begin{cases}\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+k-1), & \text{при}\quad k\geq 1,\\ 1, & \text{при}\quad k=0.\end{cases} \tag{6}$$

Відповідна функція матиме вигляд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}s_kz^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(\nu+1)_{k+1}}=\frac{{}_1F_1(1;\nu+1;z)-1}{z},$$

де

$${}_1F_1(\alpha;\beta;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(\beta)_kk!}z^k$$

– вироджена гіпергеометрична функція.

Встановлено наступний результат.

Теорема 2 [17]. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k=\frac{1}{(\nu+1)_k},\ k=\overline{0,\infty},$$

коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}s_kz^k=\frac{{}_1F_1(1;\nu+1;z)-1}{z}$$

має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $L[0,1]\times C[0,1]$ вигляду

$$s_{k+j}=\frac{1}{(\nu+1)_{k+j+1}}=\int\limits_0^1\frac{t^{k+\nu}}{(\nu+1)_k}\cdot\frac{(1-t)^j}{j!}dt,\quad k,j=\overline{0,\infty}. \tag{7}$$

Розглянемо тепер в просторі $\mathscr{X} = L[0,1]$ оператор

$$(A\varphi)(t) = \varkappa \int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau + t\varphi(t), \tag{8}$$

що є лінійною комбінацією оператора (1) та оператора множення на незалежну змінну, який відповідає класичній степеневій проблемі моментів на сегменті $[0,1]$. Аналогічно попередньому підрахуємо резольвентну функцію оператора (8)

$$\left(R_z^{\#}(A)\varphi\right)(t) = \left((I - zA)^{-1}\varphi\right)(t) = \frac{\varphi(t)}{1-zt} + \varkappa z \int\limits_0^t \varphi(t)\frac{(1-\tau z)^{\varkappa-1}}{(1-tz)^{\varkappa+1}}d\tau. \tag{9}$$

Розкладаючи праву частину (9) за степенями z, отримаємо:

$$(A^k\varphi)(t) = \varkappa \int\limits_0^t \varphi(\tau)\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(-\varkappa+1)_m(\varkappa+1)_{k-1-m}}{m!(k-m-1)!}\tau^m t^{k-m-1}d\tau + t^k\varphi(t).$$

Покладемо $\mathscr{Y} = C[0,1]$ і розглянемо на добутку просторів $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ білінійну форму

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt.$$

Для степенів спряженого оператора будемо мати зображення:

$$(A^{*j}\psi)(t) = \varkappa \int\limits_t^1 \psi(\tau)\sum_{m=0}^{j-1}\frac{(-\varkappa+1)_m(\varkappa+1)_{j-1-m}}{m!(j-m-1)!}t^m\tau^{j-m-1}d\tau + t^j\psi(t).$$

Покладемо тепер $x_0(t) \equiv 1$, $y_0(t) \equiv 1$. Тоді

$$f(z) = \int\limits_0^1 \left(R_z^{\#}(A)x_0\right)(t)dt = \int\limits_0^1 \left\{\frac{1}{1-zt} + \varkappa z\int\limits_0^1 \frac{(1-\tau z)^{\varkappa-1}}{(1-tz)^{\varkappa+1}}d\tau\right\}dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{1}{(1-zt)^{\varkappa+1}}dt = \frac{(1-z)^{-\varkappa}-1}{\varkappa z}.$$

Встановлено наступний результат.

Теорема 3 [17]. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k = \frac{(\varkappa+1)_k}{(k+1)!},\ k = \overline{0,\infty},$$

коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}s_kz^k=\frac{(1-z)^{-\varkappa}-1}{\varkappa z}$$

має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $L[0,1]\times C[0,1]$ вигляду

$$s_{k+j}=\frac{(\varkappa+1)_{k+j}}{(k+j+1)!}=\int\limits_0^1\frac{(\varkappa+1)_kt^k}{k!}\cdot\sum_{m=0}^{j}\frac{(-\varkappa+1)_m(\varkappa)_{j-m}}{m!(j-m)!}t^m dt,\quad k,j=\overline{0,\infty}. \qquad (10)$$

Якщо ж покласти $x_0(t)=t^\nu$, $\nu>-1$, і $y_0(t)\equiv 1$, то одержимо з використанням інтегральних зображень для гіпергеометричної функції Гаусса [98, с. 373]:

$$f(z)=\int\limits_0^1\left\{\frac{t^\nu}{1-zt}+\varkappa z\int\limits_0^1\frac{\tau^\nu(1-\tau z)^{\varkappa-1}}{(1-tz)^{\varkappa+1}}d\tau\right\}dt=(1-z)^{-\varkappa}\int\limits_0^1 t^\nu(1-tz)^{\varkappa-1}dt=$$

$$=\frac{1}{\nu+1}(1-z)^{-\varkappa}_2F_1(-\varkappa+1,\nu+1;\nu+2;z)=\frac{1}{\nu+1}{}_2F_1(\nu+\varkappa+1,1;\nu+2;z).$$

Теорема 4 [17]. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k=\frac{(\nu+\varkappa+1)_k}{(\nu+1)_k},\ k=\overline{0,\infty},$$

коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}s_kz^k=\frac{1}{\nu+1}{}_2F_1(\nu+\varkappa+1,1;\nu+2;z)$$

має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $L[0,1]\times C[0,1]$ вигляду

$$s_{k+j}=\frac{(\nu+\varkappa+1)_{k+j}}{(\nu+1)_{k+j+1}}=\int\limits_0^1\frac{(\varkappa+\nu+1)_k}{(\nu+1)_k}t^{k+\nu}\sum_{m=0}^{j}\frac{(-\varkappa+1)_m(\varkappa)_{j-m}}{m!(j-m)!}t^m dt,\quad k,j=\overline{0,\infty}. \qquad (11)$$

Розглянемо в просторі $\mathscr{X}=L[0,1]$ лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t)=-\int\limits_0^t(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau. \qquad (12)$$

Легко бачити, що оператор (12) є взятим зі знаком мінус квадратом оператора (1). Враховуючи тотожність

$$R_z^{\#}(-A^2)=R_{i\sqrt{z}}^{\#}(A)R_{-i\sqrt{z}}^{\#}(A)$$

і формулу (2), знайдемо резольвентну функцію оператора (12):

$$\left(R_z^{\#}(A)\varphi\right)(t) = \varphi(t) + i\sqrt{z}\int\limits_0^t \varphi(\tau)e^{i\sqrt{z}(t-\tau)}d\tau -$$

$$-i\sqrt{z}\int\limits_0^t \left\{\varphi(\tau) + i\sqrt{z}\int\limits_0^\tau \varphi(u)e^{i\sqrt{z}(\tau-u)}du\right\} e^{-i\sqrt{z}(t-\tau)}d\tau =$$

$$= \varphi(t) + i\sqrt{z}\int\limits_0^t \varphi(\tau)e^{i\sqrt{z}(t-\tau)}d\tau - i\sqrt{z}\int\limits_0^t \varphi(\tau)e^{-i\sqrt{z}(t-\tau)}d\tau +$$

$$+z\int\limits_0^t \varphi(u)\frac{e^{i\sqrt{z}(-t-u+2\tau)}}{2i\sqrt{z}}\Bigg|_u^t du = \varphi(t) + \frac{1}{2}i\sqrt{z}\int\limits_0^t \varphi(\tau)e^{i\sqrt{z}(t-\tau)}d\tau -$$

$$-\frac{1}{2}i\sqrt{z}\int\limits_0^t \varphi(\tau)e^{-i\sqrt{z}(t-\tau)}d\tau = \varphi(t) - \sqrt{z}\int\limits_0^t \varphi(\tau)\sin\sqrt{z}(t-\tau)d\tau. \qquad (13)$$

На підставі (13) неважко підрахувати, що

$$(A^k\varphi)(t) = (-1)^k\int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{2k-1}}{(2k-1)!}\varphi(\tau)d\tau.$$

Якщо тепер покласти $\mathscr{Y} = C[0,1]$ і розглянути на добутку просторів $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ білінійну форму

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt,$$

то

$$(A^{*j}\psi)(t) = (-1)^j\int\limits_t^1 \frac{(\tau-t)^{2j-1}}{(2j-1)!}\psi(\tau)d\tau.$$

Покладемо $x_0(t)\equiv 1$, $y_0(t)\equiv 1$. Тоді

$$f(z) = \int\limits_0^1 \left(R_z^{\#}(A)x_0\right)(t)dt = \int\limits_0^1 \left\{1 - \sqrt{z}\int\limits_0^t \sin\sqrt{z}(t-\tau)d\tau\right\}dt = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}. \qquad (14)$$

Встановлено наступний результат.

Теорема 5. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!},\ k = \overline{0,\infty},$$

коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $L[0,1] \times C[0,1]$ вигляду

$$s_{k+j} = \int_0^1 (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{(1-t)^{2j}}{(2j)!} dt, \quad k, j = \overline{0, \infty}.$$

Зауваження 1. Узагальнені моментні зображення для функції (14) фактично були побудовані, вивчені та використані для аналізу поведінки діагональних апроксимант функцій $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ і $\operatorname{ch} z$ В.К. Дзядиком в роботі [49].

Покладемо тепер $x_0(t) \equiv 1$, $y_0(t) = (1-t^2)^{\nu-1/2} \in C[0,1) \cap L[0,1]$, $\nu > -1/2$. Отримаємо:

$$f(z) = \int_0^1 \cos\sqrt{z}t \cdot (1-t^2)^{\nu-1/2} dt = \frac{J_\nu(\sqrt{z})\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)}{2(\sqrt{z}/2)^\nu},$$

де

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}$$

– функція Бесселя порядку ν (див. [98, с. 180–182]).

Встановлено наступний результат.

Теорема 6. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k = \frac{(-1)^k \pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)}{4^{k+1/2} k!\Gamma(k+\nu+1)}, \ k = \overline{0, \infty},$$

коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \frac{J_\nu(\sqrt{z})\pi^{1/2}\Gamma(\nu+1/2)}{2(\sqrt{z}/2)^\nu}$$

має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $L[0,1] \times C[0,1]$ вигляду

$$s_{k+j} = \int_0^1 \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \cdot \int_t^1 \frac{(\tau-t)^{2j-1}}{(2j-1)!} (1-\tau^2)^{\nu-1/2} d\tau dt, \quad k, j = \overline{0, \infty}.$$

Візьмемо за початкові елементи $x_0(t) = t$, $y_0(t) = 1/t \in C(0,1] \cap L([0,1], tdt)$. Тоді

$$f(z) = \int_0^1 \frac{\sin\sqrt{z}t}{\sqrt{z}t} dt = \frac{\operatorname{Si}(\sqrt{z})}{\sqrt{z}},$$

де

$$\mathrm{Si}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}$$

– інтегральний синус (див. [98, с.59]).

Теорема 7. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k=\frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!},\ k=\overline{0,\infty},$$

коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}s_k z^k=\frac{\mathrm{Si}(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$$

має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $L[0,1]\times(C(0,1]\cap L([0,1],tdt))$ вигляду

$$s_{k+j}=\int_0^1(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot(-1)^j\int_t^1\frac{(\tau-t)^{2j-1}}{(2j-1)!}\frac{1}{\tau}d\tau dt,\quad k,j=\overline{0,\infty}.$$

Нарешті покладемо $x_0(t)\equiv 1$, $y_0(x)=1/\sqrt{t}\in C(0,1]\cap L[0,1]$. Отримаємо:

$$f(z)=\int_0^1\frac{\cos\sqrt{z}t}{\sqrt{t}}dt=2\int_0^1\cos\sqrt{z}t^2dt=\sqrt{2\pi}\frac{C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{1/4}\right)}{z^{1/4}},$$

де

$$C(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\pi/2)^{2k}}{(2k)!(4k+1)}z^{4k+1}$$

– інтеграл Френеля (див. [98, с. 123]).

Теорема 8. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k=\frac{(-1)^k}{(2k)!(2k+1/2)},\ k=\overline{0,\infty}$$

коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}s_k z^k=\sqrt{2\pi}\frac{C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{1/4}\right)}{z^{1/4}}$$

має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $L[0,1] \times (C(0,1] \cap L[0,1])$ вигляду

$$s_{k+j} = \int\limits_0^1 (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \cdot (-1)^j \int\limits_t^1 \frac{(\tau - t)^{2j-1}}{(2j-1)!} \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\tau dt, \quad k, j = \overline{0, \infty}.$$

Подальшим узагальненням ситуацій, що мали місце в теоремах 1, 2 та 5, є розгляд в просторі $L[0,1]$ лінійного неперервного оператора дробового інтегрування Рімана-Ліувілля:

$$(A\varphi)(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{1/\rho - 1}}{\Gamma(1/\rho)} \varphi(\tau) d\tau, \quad 0 < \rho < \infty.$$

Степені цього оператора можуть бути записані у вигляді:

$$(A^k \varphi)(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{k/\rho - 1}}{\Gamma(k/\rho)} \varphi(\tau) d\tau, \quad k = \overline{1, \infty},$$

звідки

$$\left(R_z^{\#}(A)\varphi\right)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (A^k \varphi)(t) = \varphi(t) + \int\limits_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^{k/\rho - 1} z^k}{\Gamma(k/\rho)} \varphi(\tau) d\tau =$$

$$= \varphi(t) + z \int\limits_0^t \varphi(\tau)(t-\tau)^{1/\rho - 1} E_\rho(z(t-\tau)^{1/\rho}; 1/\rho) d\tau,$$

де

$$E_\rho(z;\mu) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k/\rho + \mu)} \tag{15}$$

– функція типу Міттаг–Леффлера (див. [46, с. 117]). Покладемо тепер $\mathscr{Y} = C[0,1) \cap L[0,1]$ і розглянемо на $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ білінійну форму

$$\langle x, y \rangle = \int\limits_0^1 x(t) y(t) dt.$$

Легко бачити, що

$$(A^{*j} \psi)(t) = \int\limits_t^1 \frac{(\tau - t)^{j/\rho - 1}}{\Gamma(j/\rho)} \psi(\tau) d\tau, \quad j = \overline{1, \infty},$$

і при $x_0(t) = \frac{t^{\nu_1}}{\Gamma(\nu_1 + 1)}$, $y_0(t) = \frac{(1-t)^{\nu_2}}{\Gamma(\nu_2 + 1)}$ ми отримаємо:

$$s_k = \langle x_k, y_0 \rangle = \frac{1}{\Gamma(k/\rho + \nu_1 + \nu_2 + 2)}$$

і отож:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}s_kz^k=E_\rho(z;\nu_1+\nu_2+2).$$

Встановлено наступний результат.

Теорема 9. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k=\frac{1}{\Gamma(k/\rho+\nu+2)},\ \nu>-2,\ 0<\rho<\infty,\ k=\overline{0,\infty},$$

коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}s_kz^k=E_\rho(z;\nu+2)$$

має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $L[0,1]\times(C[0,1)\cap L[0,1])$ вигляду

$$s_{k+j}=\int\limits_0^1\frac{t^{k/\rho+\nu_1}}{\Gamma(k/\rho+\nu_1+1)}\cdot\frac{(1-t)^{j/\rho+\nu_2}}{\Gamma(j/\rho+\nu_2+1)}dt,\quad k,j=\overline{0,\infty},$$

де $\nu_1,\nu_2>-1$, $\nu_1+\nu_2=\nu$.

Зауваження 2. Узагальнені моментні зображення функцій Міттаг–Леффлера були побудовані та вивчені в [18]. Поширення цих результатів на функції типу Міттаг–Леффлера було виконано М.М. Чипом в [109].

§ 2. Узагальнені моментні зображення базисних гіпергеометричних рядів

Ситуацію, наведену в теоремі 1, можна узагальнити ще й таким чином – розглянемо у просторі $\mathscr{X}=L[0,1]$ при деякому $q\in(0,+\infty)$, $q\neq 1$, лінійний обмежений оператор

$$(A\varphi)(t)=\int\limits_0^{t^q}\varphi(\tau)d\tau. \tag{16}$$

Переконаємося, що степені оператора (16) можуть бути представлені у вигляді:

$$(A^k\varphi)(t)=\int\limits_0^{t^{q^k}}\varphi(u)\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m\frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(k-m-1)_q!}t^{(k-m)_q-1}u^{m_qq^{-m}}du,\quad k=\overline{1,\infty}, \tag{17}$$

де

$$k_q:=1+q+\dots+q^{k-1}=\frac{q^k-1}{q-1},$$

$$k_q!:=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{k}i_q=(1+q)(1+q+q^2)\cdot\ldots\cdot(1+q+\dots+q^{k-1}), & \text{при}\quad k\geq 1,\\ 1, & \text{при}\quad k=0.\end{cases}$$

Для цього підрахуємо $(A^{k+1}\varphi)(t)$:

$$(A^{k+1}\varphi)(t)=\int\limits_0^{t^{q^k}}\int\limits_0^{u^q}\varphi(\tau)d\tau\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m\frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(k-1-m)_q!}t^{(k-m)_q-1}u^{m_q q^{-m}}du=$$

$$=\frac{1}{q}\int\limits_0^{t^{q^{k+1}}}\int\limits_0^{s}\varphi(\tau)d\tau\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m\frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(k-1-m)_q!}t^{(k-m)_q-1}s^{m_q q^{-m-1}+q^{-1}-1}ds=$$

$$=\frac{1}{q}\int\limits_0^{t^{q^{k+1}}}\varphi(\tau)\int\limits_\tau^{t^{q^{k+1}}}\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m\frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(k-1-m)_q!}t^{(k-m)_q-1}s^{(m+1)_q q^{-m-1}-1}dsd\tau=$$

$$=\int\limits_0^{t^{q^{k+1}}}\varphi(\tau)\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m\frac{q^{m(m+1)/2}}{(m+1)_q!(k-1-m)_q!}t^{(k-m)_q-1}\left(t^{(m+1)_q q^{k-m}}-\tau^{(m+1)_q q^{-m-1}}\right)d\tau=$$

$$=\int\limits_0^{t^{q^{k+1}}}\varphi(\tau)\left\{t^{(k+1)_q-1}\sum_{m=1}^{k}(-1)^{m-1}\frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(k-m)_q!}+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{k}(-1)^m\frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(k-m)_q!}t^{(k+1+m)_q-1}\tau^{m_q q^{-m}}\right\}d\tau. \tag{18}$$

Порівнюючи (18) з формулою (17), в якій замість k стоїть $k+1$, бачимо, що нам залишилося довести, що

$$\frac{1}{k_q!}=-\sum_{m=1}^{k}(-1)^m\frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(k-m)_q!},$$

або що

$$\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\frac{q^{m(m-1)/2}k_q!}{m_q!(k-m)_q!}=0. \tag{19}$$

Для цього скористаємося властивостями так званих многочленів Гаусса:

$$\begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix}:=\begin{cases}\dfrac{k_q!}{m_q!(k-m)_q!}, & \text{якщо}\quad 0\le m\le k,\\ 0, & \text{в протилежному випадку.}\end{cases}$$

Має місце тотожність (див. [111, с. 50]):

$$\sum_{m=0}^{k}\begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix}(-1)^m z^m q^{m(m-1)/2}=(1-z)(1-zq)\cdot\ldots\cdot(1-zq^{k-1}). \tag{20}$$

Покладаючи в (20) $z = 1$, отримуємо (19) і, отже, справедливість формули (17) доведена. Візьмемо тепер $\mathscr{Y} = C[0,1]$ і розглянемо на $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ білінійну форму

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t)dt.$$

Нескладний підрахунок дає наступні формули для спряженого оператора до оператора (16) та його степенів відносно цієї білінійної форми:

$$(A^*\psi)(t) = \int_{t^{1/q}}^1 \psi(\tau)d\tau,$$

$$(A^{j*}\psi)(t) = \int_{t^{1/q^j}}^1 \psi(\tau) \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^m \frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(j-1-m)_q!} \tau^{(j-m)_q - 1} t^{m_q q^{-m}} d\tau.$$

Покладемо тепер $x_0(t) \equiv 1$. Тоді

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \int_0^{t^{q^k}} \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \frac{q^{m(m-1)}}{m_q!(k-1-m)_q!} t^{(k-m)_q - 1} u^{m_q q^{-m}} du =$$

$$= \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(k-1-m)_q!} t^{(k-m)_q - 1} \frac{t^{m_q q^{k-m} + q^m}}{m_q q^{-m} + 1} =$$

$$= t^{(k+1)_q - 1} \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m-1} \frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(k-m)_q!} =$$

$$= t^{(k+1)_q - 1} \left\{ -\sum_{m=0}^{k} (-1)^m \frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(k-m)_q!} + \frac{1}{k_q!} \right\} = \frac{t^{(k+1)_q - 1}}{k_q!}.$$

При цьому ми знову використали тотожність (20). Покладемо тепер $y_0(t) \equiv 1$. Аналогічно отримаємо:

$$y_j(t) = (A^{*j} y_0)(t) = \sum_{m=0}^{j} (-1)^m \frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(j-m)_q!} t^{m_q q^{-m}}. \tag{21}$$

Нарешті підрахуємо узагальнені моменти

$$s_k = \int_0^1 x_k(t)dt = \int_0^1 \frac{t^{(k+1)_q - 1}}{k_q!} dt = \frac{1}{(k+1)_q!}, \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{22}$$

Таким чином ми побудували узагальнене моментне зображення послідовності коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)_q!} = \frac{E_q(z) - 1}{z}, \tag{23}$$

де q –аналог експоненти $E_q(z)$ визначається рядом (див. [79])

$$E_q(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k_q!}.$$

Теорема 10 [21, 24]. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k = \frac{1}{(k+1)_q!},\ k = \overline{0, \infty},$$

коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z) = \frac{E_q(z) - 1}{z}$$

має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $L[0,1] \times C[0,1]$

$$s_{k+j} = \int_0^1 \frac{t^{(k+1)_q - 1}}{k_q} \cdot \sum_{m=0}^{j} (-1)^m \frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(j-m)_q!} t^{m_q q^{-m}} dt,\ k, j = \overline{0, \infty}.$$

Для того, щоб отримати інше зображення функції $E_q(z)$, скористаємося наступним позначенням (див. [111, с.31]):

$$(a;q)_k = \begin{cases} (1-a)(1-aq) \cdot \ldots \cdot (1-aq^{k-1}), & \text{при } \ k \geq 1, \\ 1, & \text{при } \ k = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Зауважимо, що по аналогії з символом Похгаммера $(\alpha)_k$, означеним за формулою (6), символ $(a;q)_k$, означений за формулою (24), іноді називають q-символом Похгаммера. Будемо мати:

$$k_q! = \prod_{m=1}^{k-1} (1 + q + \cdots + q^m) = \frac{1}{(1-q)^k} \prod_{m=1}^{k} (1 - q^m) = \frac{(q;q)_k}{(1-q)^k}. \tag{25}$$

Отож,

$$E_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k_q!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((1-q)z)^k}{(q;q)_k}. \tag{26}$$

Л. Ейлером встановлено наступний результат (див. [111, с. 32]).

Теорема 11. При $|z| < 1$, $|q| < 1$ виконуються тотожності:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(1-q)(1-q^2) \cdot \ldots \cdot (1-q^k)} = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - zq^k)^{-1}, \tag{27}$$

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k q^{k(k-1)/2}}{(1-q)(1-q^2) \cdot \ldots \cdot (1-q^k)} = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + zq^k). \tag{28}$$

При $|q|<1$, враховуючи (26) і (27), отримаємо

$$E_q(z)=\prod_{k=0}^{\infty}(1-((1-q)z)q^k)^{-1}.$$

При $|q|>1$, враховуючи (26) і (28), отримаємо

$$E_q(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-q)^k z^k}{(1-q)(1-q^2)\cdot\ldots\cdot(1-q^k)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((q-1)z)^k\left(\frac{1}{q}\right)^{k(k+1)/2}}{(1/q;1/q)_k}=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{(q-1)z}{q^{k+1}}\right).$$

Залишаючи $y_0(t)\equiv 1$, покладемо тепер $x_0(t)=t^{\nu}$, $\nu>-1$. Отримаємо

$$x_k(t)=(A^k x_0)(t)=$$

$$=\int\limits_0^{t^{q^k}}\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m\frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(k-1-m)_q!}t^{(k-m)_q-1}u^{m_q q^{-m}+\nu}du=\frac{t^{(k+1)_q-1+\nu q^k}}{\prod\limits_{m=1}^{k}(m_q+\nu q^{m-1})}.$$

Відповідні узагальнені моменти будуть мати вигляд:

$$s_k=\int\limits_0^1 x_k(t)dt=\int\limits_0^1\frac{t^{(k+1)_q-1+\nu q^k}}{\prod\limits_{m=1}^{k}(m_q+\nu q^{m-1})}dt=\frac{1}{\prod\limits_{m=1}^{k+1}(m_q+\nu q^{m-1})},\quad k=\overline{0,\infty}. \qquad (29)$$

Твірну функцію послідовності (29) можна представити у вигляді:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(1+\nu)(1+q+\nu q)\cdot\ldots\cdot(1+q+\ldots+q^k+\nu q^k)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1/q)^{k(k+1)/2}z^k}{(\nu+1)(\nu+1+1/q)\cdot\ldots\cdot(\nu+1+1/q+\ldots+1/q^k)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{q})^{k(k+1)/2}(1-\frac{1}{q})^{k+1}z^k}{\left(\nu(1-\frac{1}{q})+1\right)^{k+1}(1-\frac{1}{\nu(1-\frac{1}{q})+1}\cdot\frac{1}{q})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{\nu(1-\frac{1}{q})+1}\cdot\frac{1}{q^{k+1}})}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{q})^{k(k+1)/2}(\frac{q-1}{\nu(q-1)+q})^{k+1}z^k}{(\frac{1}{\nu(q-1)+1};\frac{1}{q})_{k+1}}.$$

Отримано наступний результат.

Теорема 12 [21, 24]. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k = \frac{1}{\prod\limits_{m=1}^{k+1}(m_q+\nu q^{m-1})},\ \nu>-1,\ k=\overline{0,\infty},$$

коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{q})^{k(k+1)/2}(\frac{q-1}{\nu(q-1)+q})^{k+1}z^k}{(\frac{1}{\nu(q-1)+1};\frac{1}{q})_{k+1}}$$

має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $L[0,1]\times C[0,1]$

$$s_{k+j}=\int\limits_0^1 \frac{t^{(k+1)_q-1+\nu q^k}}{\prod\limits_{m=1}^{k}(m_q+\nu q^{m-1}}\cdot\sum_{m=0}^{j}(-1)^m\frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(j-m)_q!}t^{m_q q^{-m}}dt,\ k,j=\overline{0,\infty}.$$

Розглянемо тепер у просторі $\mathscr{X}=L[0,1]$ при деякому $q\in(0,\infty)$ лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t)=\varkappa\int\limits_0^{t^q}\varphi(\tau)d\tau+t^q\varphi(t^q). \tag{30}$$

Переконаємося, що степені оператора (30) можуть бути зображені у вигляді

$$(A^k\varphi)(t)=\int\limits_0^{t^{q^k}}\varphi(\tau)\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m t^{(k-m)_q-1}\tau^{m_q q^{-m}}\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{r=0}^{k-1-m}(\varkappa+r_q)\prod\limits_{p=1}^{m}(\varkappa q^p-p_q)}{m_q!(k-1-m)_q!q^m}d\tau+t^{(k+1)_q-1}\varphi(t^{q^k}),\quad k=\overline{1,\infty}. \tag{31}$$

Для цього підрахуємо $(A^{k+1}\varphi)(t)$:

$$(A^{k+1}\varphi)(t)=\int\limits_0^{t^{q^k}}\left\{\varkappa\int\limits_0^{\tau^q}\varphi(u)du+\tau^q\varphi(\tau^q)\right\}\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m t^{(k-m)_q-1}\tau^{m_q q^{-m}}\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{r=0}^{k-1-m}(\varkappa+r_q)\prod\limits_{p=1}^{m}(\varkappa q^p-p_q)}{m_q!(k-1-m)_q!q^m}d\tau+t^{(k+1)_q-1}\left\{\varkappa\int\limits_0^{t^{q^{k+1}}}\varphi(u)du+t^{q^{k+1}}\varphi(t^{q^{k+1}})\right\}=$$

$$=\frac{\varkappa}{q}\int\limits_0^{t^{q^{k+1}}}\int\limits_0^{s}\varphi(u)du\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m t^{(k-m)_q-1}s^{m_q q^{-m-1}}\frac{\prod\limits_{r=0}^{k-1-m}(\varkappa+r_q)\prod\limits_{p=1}^{m}(\varkappa q^p-p_q)}{m_q!(k-1-m)_q!q^m}s^{1/q-1}ds+$$

$$+\frac{1}{q}\int\limits_0^{t^{q^{k+1}}}\varphi(s)\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m t^{(k-m)_q-1}s^{m_q q^{-m-1}}\frac{\prod\limits_{r=0}^{k-1-m}(\varkappa+r_q)\prod\limits_{p=1}^{m}(\varkappa q^p-p_q)}{m_q!(k-1-m)_q!q^m}s^{1/q}ds+$$

$$+\varkappa t^{(k+1)_q-1}\int\limits_0^{t^{q^{k+1}}}\varphi(u)du+t^{(k+2)_q-1}\varphi(t^{q^{k+1}})=$$

$$=\frac{\varkappa}{q}\int\limits_0^{t^{q^{k+1}}}\varphi(u)\int\limits_u^{t^{q^{k+1}}}\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m t^{(k-m)_q-1}s^{m_q q^{-m-1}+q^{-1}-1}\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{r=0}^{k-1-m}(\varkappa+r_q)\prod\limits_{p=1}^{m}(\varkappa q^p-p_q)}{m_q!(k-1-m)_q!q^m}dsdu+\frac{1}{q}\int\limits_0^{t^{q^{k+1}}}\varphi(s)\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m t^{(k-m)_q-1}s^{m_q q^{-m-1}+q^{-1}}\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{r=0}^{k-1-m}(\varkappa+r_q)\prod\limits_{p=1}^{m}(\varkappa q^p-p_q)}{m_q!(k-1-m)_q!q^m}ds+\varkappa t^{(k+1)_q-1}\int\limits_0^{t^{q^{k+1}}}\varphi(u)du+t^{(k+2)_q-1}\varphi(t^{q^{k+1}})=$$

$$=\int\limits_0^{t^{q^{k+1}}}\varphi(u)\left\{\varkappa t^{(k+1)_q-1}\left(1+\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m\frac{\prod\limits_{r=0}^{k-1-m}(\varkappa+r_q)\prod\limits_{p=1}^{m}(\varkappa q^p-p_q)}{(m+1)_q!(k-1-m)_q!}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{k}(-1)^m t^{(k+1-m)_q-1}u^{m_q q^{-m}}\frac{\prod\limits_{r=0}^{k-m}(\varkappa+r_q)\prod\limits_{p=1}^{m}(\varkappa q^p-p_q)}{m_q!(k-m)_q!q^m}\right\}du+t^{(k+2)_q-1}\varphi(t^{q^{k+1}}). \qquad (32)$$

Порівнюючи (32) з формулою (31), в якій замість k стоїть $k+1$, бачимо, що нам залишилось довести тотожність

$$\frac{\prod\limits_{r=0}^{k}(\varkappa+r_q)}{k_q!}=\varkappa\left(1+\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m\frac{\prod\limits_{r=0}^{k-1-m}(\varkappa+r_q)\prod\limits_{p=1}^{m}(\varkappa q^p-p_q)}{(m+1)_q!(k-1-m)_q!}\right). \qquad (33)$$

Легко бачити, що тотожність (33) еквівалентна тотожності

$$\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\frac{\prod\limits_{r=0}^{k-m}(\varkappa+r_q)\prod\limits_{p=0}^{m-1}(\varkappa q^p-p_q)}{m_q!(k-m)_q!}=\varkappa. \qquad (34)$$

Розглянемо твірну функцію послідовності лівих частин рівності (34):

$$K(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{m=0}^{k}(-1)^m\frac{\prod\limits_{r=0}^{k-m}(\varkappa+r_q)\prod\limits_{p=0}^{m-1}(\varkappa q^p-p_q)}{m_q!(k-m)_q!}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\prod\limits_{p=0}^{m-1}(\varkappa q^p-p_q)}{m_q!}\sum_{k=m}^{\infty}z^k\frac{\prod\limits_{r=0}^{k-m}(\varkappa+r_q)}{(k-m)_q!}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m z^m\frac{\prod\limits_{p=0}^{m-1}(\varkappa q^p-p_q)}{m_q!}\sum_{k=0}^{\infty}z^k\frac{\prod\limits_{r=0}^{k}(\varkappa+r_q)}{k_q!}=K_1(z)\cdot K_2(z).$$

Щоб обчислити $K_1(z)$, приймемо до уваги, що

$$\prod_{p=0}^{m-1}(\varkappa q^p-p_q)=\prod_{p=0}^{m-1}\left(\varkappa q^p-\frac{1-q^p}{1-q}\right)=\frac{(-1)^m}{(1-q)^m}\prod_{p=0}^{m-1}(1-q^p(1+\varkappa(1-q)))=$$

$$=\frac{1}{(q-1)^m}(1+\varkappa(1-q);q)_m,$$

а також раніше встановлену рівність (25):

$$K_1(z)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m z^m\frac{\prod\limits_{p=0}^{m-1}(\varkappa q^p-p_q)}{m_q!}=\sum_{m=0}^{\infty}z^m\frac{(1+\varkappa(1-q);q)_m}{(q;q)_m}. \tag{35}$$

Скористаємося тепер наступним результатом, що належить О. Коші (див. [111, с.31])

Теорема 13. Нехай $|q|<1$, $|z|<1$. Тоді

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-a)(1-aq)\cdot\ldots\cdot(1-aq^{k-1})z^k}{(1-q)(1-q^2)\cdot\ldots\cdot(1-q^k)}=\prod_{k=0}^{\infty}\frac{(1-azq^k)}{(1-zq^k)}. \tag{36}$$

Співставляючи (35) та (36), маємо:

$$K_1(z)=\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1-(1+\varkappa(1-q))zq^k}{1-zq^k}.$$

Щоб обчислити $K_2(z)$, спочатку підрахуємо:

$$\prod_{r=0}^{k}(\varkappa+r_q)=\prod_{r=0}^{k}\left(\varkappa+\frac{1-q^r}{1-q}\right)=\frac{\varkappa}{(1-q)^k}\prod_{r=1}^{k}\left(\varkappa(1-q)+1-q^k\right)=$$

$$=\frac{\varkappa(\varkappa(1-q)+1)^k}{(1-q)^k}\prod_{r=1}^{k}\left(1-\frac{q^r}{\varkappa(1-q)+1}\right)=\frac{\varkappa(\varkappa(1-q)+1)^k}{(1-q)^k}\left(\frac{q}{\varkappa(1-q)+1};q\right)_k.$$

Тому, враховуючи (36),

$$K_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\prod\limits_{r=0}^{k} (\varkappa + r_q)}{k_q!} = \varkappa \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{q}{\varkappa(1-q)+1}; q)_k}{(q;q)_k} (z(\varkappa(1-q)+1))^k =$$

$$= \varkappa \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - zq^{k+1})}{(1 - (\varkappa(1-q)+1)zq^k)}.$$

Таким чином, шукана твірна функція дорівнює:

$$K(z) = K_1(z) \cdot K_2(z) = \varkappa \prod_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - zq^{k+1})}{(1 - zq^k)} = \frac{\varkappa}{1-z},$$

звідки і випливає тотожність (34), а з нею і зображення (31). Зауважимо, що в ході доведення ми припускали, що $|q| < 1$, але, враховуючи аналітичність обох частин (34) за змінною q, це припущення не є необхідним для справедливості зображення (31).

Знову покладаючи $\mathscr{Y}$, розглянемо білінійну форму на $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$

$$\langle x, y \rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt.$$

Нескладно отримати тепер зображення для спряженого оператора до оператора (30) та його степенів:

$$(A^*\psi)(t) = \varkappa \int\limits_{t^{1/q}}^{1} \psi(\tau)d\tau + \frac{1}{q}\psi(t^{1/q})t^{1/q},$$

$$(A^{*j}\psi)(t) = \int\limits_{t^{1/q^j}}^{1} \psi(\tau) \sum_{m=0}^{j-1} (-1)^m \tau^{(j-m)_q - 1} t^{m_q q^{-m}} \times$$

$$\times \frac{\prod\limits_{r=0}^{j-1-m} (\varkappa + r_q) \prod\limits_{p=1}^{m} (\varkappa q^p - p_q)}{m_q!(j-1-m)_q! q^m} d\tau + \frac{1}{q^j}\psi(t^{1/q^j})t^{j_q q^{-j}}, \quad j = \overline{1, \infty}.$$

Покладемо $x_0(t) \equiv 1$. Враховуючи (31), отримаємо:

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \int\limits_0^{t^{q^k}} \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m t^{(k-m)_q - 1} \tau^{m_q q^{-m}} \times$$

$$\times \frac{\prod\limits_{r=0}^{k-1-m} (\varkappa + r_q) \prod\limits_{p=1}^{m} (\varkappa q^p - p_q)}{m_q!(k-1-m)_q! q^m} d\tau + t^{(k+1)_q - 1} =$$

$$= t^{(k+1)_q - 1}\left\{\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m \frac{\prod\limits_{r=0}^{k-1-m}(\varkappa + r_q)\prod\limits_{p=1}^{m}(\varkappa q^p - p_q)}{(m+1)_q!(k-1-m)_q!} + 1\right\} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{r=0}^{k}(\varkappa + r_q)}{\varkappa k_q!} t^{(k+1)_q - 1} = \frac{\prod\limits_{r=1}^{k}(\varkappa + r_q)}{k_q!} t^{(k+1)_q - 1}.$$

Аналогічно при $y_0(t) \equiv 1$ отримаємо:

$$y_j(t) = (A^{*j}y_0)(t) = \sum_{m=0}^{j-1}(-1)^m t^{m_q q^{-m}} \frac{\prod\limits_{r=0}^{j-1-m}(\varkappa + r_q)\prod\limits_{p=1}^{m}(\varkappa q^p - p_q)}{m_q!(j-m)_q! q^m} +$$

$$+ t^{j_q q^{-j}}\left\{\frac{1}{q^j} - \sum_{m=0}^{j-1}(-1)^m \frac{\prod\limits_{r=0}^{j-1-m}(\varkappa + r_q)\prod\limits_{p=1}^{m}(\varkappa q^p - p_q)}{m_q!(j-m)_q! q^m}\right\} =$$

$$= \sum_{m=0}^{j}(-1)^m \frac{\prod\limits_{r=0}^{j-1-m}(\varkappa + r_q)\prod\limits_{p=1}^{m}(\varkappa q^p - p_q)}{m_q!(j-m)_q! q^m} t^{m_q q^{-m}}.$$

Обчислимо узагальнені моменти:

$$\dot{s}_k = \int\limits_0^1 x_k(t)dt = \int\limits_0^1 \frac{\prod\limits_{r=1}^{k}(\varkappa + r_q)}{k_q!} t^{(k+1)_q - 1}dt = \frac{\prod\limits_{r=1}^{k}(\varkappa + r_q)}{(k+1)_q!}, \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{37}$$

Враховуючи теорему 13, при $|q| < 1$ маємо

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{r=1}^{k}(\varkappa + r_q)}{(k+1)_q!} z^k = (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{r=1}^{k}(\varkappa(1-q) + 1 - q^r)}{(q;q)_{k+1}} z^k =$$

$$= (1-q)\sum_{k=0}^{\infty} z^k(\varkappa(1-q)+1)^k \frac{\prod\limits_{r=1}^{k}(1 - \frac{q^r}{\varkappa(1-q)+1})}{(q;q)_{k+1}} =$$

$$= \frac{1}{\varkappa}\sum_{k=0}^{\infty} z^k(\varkappa(1-q)+1)^{k+1} \frac{(\frac{1}{\varkappa(1-q)+1};q)_{k+1}}{(q;q)_{k+1}} =$$

$$= \frac{1}{\varkappa z}\left\{-1 + \sum_{k=0}^{\infty} z^k(\varkappa(1-q)+1)^k \frac{(\frac{1}{\varkappa(1-q)+1};q)_k}{(q;q)_k}\right\} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(1-zq^k)}{(1-(\varkappa(1-q)+1)zq^k)} - 1}{\varkappa z}. \tag{38}$$

Аналогічно, при $|q|>1$ буде

$$f(z)=\frac{1}{\varkappa z}\left\{-1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\varkappa(1-q)+1;\frac{1}{q})_k}{(\frac{1}{q};\frac{1}{q})_k}\left(\frac{z}{q}\right)^k\right\}=\frac{\prod\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(1-(\varkappa(1-q)+1)zq^{-k-1})}{(1-zq^{-k-1})}-1}{\varkappa z}. \tag{39}$$

Встановлено таким чином наступний результат.

Теорема 14 [21, 24]. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k=\frac{\prod\limits_{r=1}^{k}(\varkappa+r_q)}{(k+1)_q!},\ k=\overline{0,\infty},$$

коефіцієнтів степеневого розкладу функції (38) при $|q|<1$, або ж функції (39) при $|q|>1$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $L[0,1]\times C[0,1]$

$$s_{k+j}=\int\limits_0^1\frac{\prod\limits_{r=1}^{k}(\varkappa+r_q)}{k_q!}t^{(k+1)_q-1}\cdot\sum_{m=0}^{j}\frac{\prod\limits_{r=0}^{j-1-m}(\varkappa+r_q)\prod\limits_{p=1}^{m}(\varkappa q^p-p_q)}{m_q!(j-m)_q!q^m}t^{m_q q^{-m}}dt,\ k,j=\overline{0,\infty}.$$

Залишаючи $y_0(t)\equiv 1$, покладемо тепер $x_0(t)=t^{\nu}$, $\nu>-1$. Отримаємо

$$x_k(t)=(A^kx_0)(t)=\int\limits_0^{t^{q^k}}\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m t^{(k-m)_q-1}\tau^{m_q q^{-m}}\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{r=0}^{k-1-m}(\varkappa+r_q)\prod\limits_{p=1}^{m}(\varkappa q^p-p_q)}{m_q!(k-1-m)_q!q^m}d\tau+t^{(k+1)_q-1+\nu q^k}=\prod_{m=1}^{k}\frac{m_q+\nu q^{m-1}+\varkappa}{m_q+\nu q^{m-1}}t^{(k+1)_q-1+\nu q^k}.$$

Відповідні узагальнені моменти:

$$s_k=\int\limits_0^1 x_k(t)dt=\int\limits_0^1\prod_{m=1}^{k}\frac{m_q+\nu q^{m-1}+\varkappa}{m_q+\nu q^{m-1}}t^{(k+1)_q-1+\nu q^k}dt=$$

$$=\frac{\prod\limits_{m=1}^{k}(m_q+\nu q^{m-1}+\varkappa)}{\prod\limits_{m=1}^{k+1}(m_q+\nu q^{m-1})},\quad k=\overline{0,\infty}. \tag{40}$$

Отримаємо наступний результат.

Теорема 15 [21, 24]. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k = \frac{\prod\limits_{m=1}^{k} (m_q + \nu q^{m-1} + \varkappa)}{\prod\limits_{m=1}^{k+1} (m_q + \nu q^{m-1})}, \ k = \overline{0, \infty},$$

має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $L[0,1] \times C[0,1]$

$$s_{k+j} = \int\limits_0^1 \prod_{m=1}^{k} \frac{m_q + \nu q^{m-1} + \varkappa}{m_q + \nu q^{m-1}} t^{(k+1)_q - 1 + \nu q^k} \cdot \sum_{m=0}^{j} \frac{\prod\limits_{r=0}^{j-1-m} (\varkappa + r_q) \prod\limits_{p=1}^{m} (\varkappa q^p - p_q)}{m_q!(j-m)_q! q^m} t^{m_q q^{-m}} dt, \ k, j = \overline{0, \infty}.$$

Функції, що були розглянуті в теоремах 10, 12, 14 та 15, тісно пов'язані з так званими базисними гіпергеометричними рядами (див.[15]).

Означення 1 [6, с. 196]. Базисним гіпергеометричним рядом при деякому q, $|q| < 1$, називається степеневий ряд вигляду

$${}_r\Phi_s \left[\begin{array}{ccccc} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_r; & z \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_s & \end{array} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1; q)_k (\alpha_2; q)_k \cdot \ldots \cdot (\alpha_r; q)_k}{(q; q)_k (\rho_1; q)_k \cdot \ldots \cdot (\rho_s; q)_k} z^k.$$

Інший підхід до побудови узагальнених моментних зображень базисних гіпергеометричних рядів грунтується на понятті q-інтеграла Ф. Джексона [181].

Означення 2. Для деякого фіксованого q, $|q| < 1$, q-інтеграл від заданої на відрізку $[0, 1]$ функції $\varphi(x)$ визначається за формулою

$$\Phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(u) d_q u = x(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(xq^k) q^k, \tag{41}$$

де $x \in [0, 1]$, якщо тільки ряд в правій частині (41) збігається.

Оберненим оператором до оператора q-інтегрування (41) є оператор q-диференціювання.

Означення 3 (див. [114]). Для деякого фіксованого q, $|q| < 1$, q – похідна заданої на відрізку $[0, 1]$ функції $\Phi(x)$ визначається за формулою:

$$\frac{d_q}{d_q x} \Phi(x) = \frac{\Phi(x) - \Phi(qx)}{(1-q)x}. \tag{42}$$

Очевидно, що у випадку існування q-інтеграла (41) має місце тотожність

$$\frac{d_q}{d_q x} \int\limits_0^x \varphi(u) d_q u \equiv \varphi(u).$$

Розглянемо тепер у просторі $\mathscr{X} = L[0,1] \cap C(0,1]$ лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t) = \int\limits_0^t \varphi(\tau) d_q\tau = t(1-q)\sum_{k=0}^{\infty} \varphi(tq^k)q^k. \tag{43}$$

Підрахуємо його резольвентну функцію, яка є розв'язком рівняння

$$\varphi(t) - z\int\limits_0^t \varphi(u) d_q u = \psi(t). \tag{44}$$

Застосуємо до (44) оператор q-диференціювання (42):

$$\frac{d_q}{d_q t}\varphi(t) - z\varphi(t) = \frac{d_q}{d_q t}\psi(t). \tag{45}$$

Спершу розглянемо однорідне q-диференціальне рівняння

$$\frac{d_q}{d_q t}\varphi(t) - z\varphi(t) = 0.$$

Враховуючи (42), послідовно отримаємо

$$\varphi(t) = \frac{\varphi(qt)}{1 - z(1-q)t} = \frac{\varphi(q^2 t)}{(1 - z(1-q)t)(1 - z(1-q)qt)} = \ldots = \frac{\varphi(0)}{\prod\limits_{m=0}^{\infty}(1 - z(1-q)tq^m)}.$$

Позначимо

$$\omega(t) = \frac{1}{\prod\limits_{m=0}^{\infty}(1 - (1-q)tq^m)}$$

і будемо шукати розв'язок неоднорідного рівняння (45) у вигляді

$$\varphi(t) = C(t)\omega(zt). \tag{46}$$

Враховуючи тотожність

$$\frac{d_q}{d_q t}\left(x(t)y(t)\right) = x(qt)\frac{d_q}{d_q t}y(t) + y(t)\frac{d_q}{d_q t}x(t),$$

яка є простим наслідком означення (42), отримаємо з (45) і (46)

$$\frac{d_q}{d_q t}C(t) = \frac{1}{\omega(qzt)}\frac{d_q}{d_q t}\psi(t).$$

Таким чином,

$$C(t) = \int\limits_0^t \frac{1}{\omega(qz\tau)}\frac{d_q}{d_q\tau}\psi(\tau) d_q\tau + C_0, \tag{47}$$

де C_0 – деяка константа. З означень q-інтеграла та q-похідної можна вивести формулу, що є аналогом інтегрування частинами:

$$\int\limits_0^t x(\tau)\frac{d_q}{d_q\tau}y(\tau)d_q\tau = x(\tau)y(\tau)|_0^t - \int\limits_0^t y(q\tau)\frac{d_q}{d_q\tau}x(\tau)d_q\tau. \tag{48}$$

Використовуючи (48), з (47) маємо

$$C(t) = \frac{\psi(t)}{\omega(zt)} - \frac{\psi(0)}{\omega(0)} - \int\limits_0^t \psi(\tau)\frac{d_q}{d_q\tau}\frac{1}{\omega(z\tau)}d_q\tau + C_0. \tag{49}$$

Як легко переконатися,

$$\frac{d_q}{d_q\tau}\frac{1}{\omega(z\tau)} = \frac{\prod\limits_{m=0}^{\infty}(1-(1-q)z\tau q^m) - \prod\limits_{m=0}^{\infty}(1-(1-q)z\tau q^{m+1})}{(1-q)\tau} = \frac{-z}{\omega(zq\tau)}. \tag{50}$$

З (46), (49) та (50) отримаємо

$$\varphi(t) = \psi(t) - \psi(0)\omega(zt) + z\int\limits_0^t \psi(\tau)\frac{\omega(zt)}{\omega(z\tau q)}d_q\tau + C_0\omega(zt).$$

Покладаючи в (44) $t=0$, бачимо, що $\varphi(0)=\psi(0)$, отож остаточно

$$(R_z^{\#}(A)\psi)(t) = \varphi(t) = \psi(t) + z\int\limits_0^t \psi(\tau)\prod_{m=0}^{\infty}\frac{1-(1-q)z\tau q^{m+1}}{1-(1-q)ztq^m}d_q\tau.$$

Використовуючи тотожність (36), отримаємо

$$\prod_{m=0}^{\infty}\frac{1-(1-q)z\tau q^{m+1}}{1-(1-q)ztq^m} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\tau q/t;q)_k}{(q;q)_k}((1-q)zt)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{m=1}^{k}(t-\tau q^m)}{(q;q)_k}((1-q)z)^k.$$

Таким чином, степені оператора (43) можуть бути представлені у вигляді

$$(A^k\varphi)(t) = (1-q)^{k-1}\int\limits_0^t \varphi(\tau)\frac{\prod\limits_{m=1}^{k-1}(t-\tau q^m)}{(q;q)_{k-1}}d_q\tau, \quad k=\overline{1,\infty}.$$

Покладемо тепер $\mathscr{Y} = C[0,1]$. Враховуючи, що за означенням

$$\int\limits_a^b \varphi(t)d_qt := \int\limits_0^b \varphi(t)d_qt - \int\limits_0^a \varphi(t)d_qt),$$

неважко переконатись, що має місце формула

$$\int_0^1 x(t)\int_0^t K(t,\tau)y(\tau)d_q\tau d_qt = \int_0^1 y(t)\int_{qt}^1 K(\tau,t)x(\tau)d_q\tau d_qt \tag{51}$$

А тому степені оператора, спряженого до оператора (43) по відношенню до білінійної форми

$$\langle x,y\rangle = \int_0^1 x(t)y(t)d_qt,$$

можуть бути зображені у вигляді

$$(A^{*j}\psi)(t) = (1-q)^{j-1}\int_{qt}^1 \psi(\tau)\frac{\prod\limits_{m=1}^{j-1}(\tau - tq^m)}{(q;q)_{j-1}}d_q\tau, \quad j=\overline{1,\infty}.$$

Покладемо тепер $x_0(t)\equiv 1$. Тоді

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = (1-q)^{k-1}\int_0^t \frac{\prod\limits_{m=1}^{k-1}(t-\tau q^m)}{(q;q)_{k-1}}d_q\tau =$$

$$= \frac{(1-q)^k}{(q;q)_{k-1}}t^k\sum_{n=0}^\infty q^n\prod_{m=n+1}^{k+n-1}(1-q^m) = (1-q)^k t^k\sum_{n=0}^\infty q^n\frac{\prod\limits_{m=k}^{k+n-1}(1-q^m)}{(q;q)_n} =$$

$$= (1-q)^k t^k\sum_{n=0}^\infty q^n\frac{(q^k;q)_n}{(q;q)_n} = (1-q)^k t^k\prod_{n=0}^\infty\frac{(1-q^{k+1+n})}{(1-q^{n+1})} =$$

$$= (1-q)^k t^k\frac{1}{\prod\limits_{n=1}^k(1-q^n)} = \frac{(1-q)^k}{(q;q)_k}t^k.$$

При цьому ми знову використали тотожність (36). Аналогічно, покладаючи $y_0(t)\equiv 1$, отримаємо

$$y_j(t) = (A^{*j}y_0)(t) = \frac{(1-q)^j(tq;q)_j}{(q;q)_j}, \quad j=\overline{0,\infty}.$$

Відповідні узагальнені моменти дорівнюватимуть

$$s_k = \int_0^1 x_k(t)d_qt = \frac{(1-q)^k}{(q;q)_k}(1-q)\sum_{n=0}^\infty q^{kn+n} =$$

$$= \frac{(1-q)^{k+1}}{(q;q)_{k+1}} = \frac{1}{(k+1)_q!}, \quad k = \overline{0,\infty}. \tag{52}$$

Таким чином, ми побудували узагальнене моментне зображення послідовності коефіцієнтів степеневого розкладу функції (23) при $|q| < 1$.

Теорема 16 [27]. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k = \frac{1}{(k+1)_q!},\ k = \overline{0,\infty},$$

коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z) = \frac{E_q(z) - 1}{z}$$

при $|q| < 1$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $(L[0,1] \cap C(0,1]) \times C[0,1]$

$$s_{k+j} = \int\limits_0^1 \frac{(1-q)^k}{(q;q)_k} t^k \cdot \frac{(1-q)^j (tq;q)_j}{(q;q)_j} d_q t,\ k,j = \overline{0,\infty}.$$

Залишаючи $y_0(t)$ тим же самим, покладемо $x_0(t) = t^\nu$, $\nu > -1$. Отримаємо:

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = (1-q)^{k-1} \int\limits_0^t \tau^\nu \frac{\prod\limits_{m=1}^{k-1}(t - \tau q^m)}{(q;q)_{k-1}} d_q \tau =$$

$$= \frac{(1-q)^k t^{k+\nu}}{(q;q)_{k-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{m=1}^{k-1} (1 - q^{m+n}) q^{n(\nu+1)} = (1-q)^k t^{k+\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^k;q)_n}{(q;q)_n} q^{n(\nu+1)} =$$

$$= (1-q)^k t^{k+\nu} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 - q^{k+n+\nu+1}}{1 - q^{n+\nu+1})} = \frac{(1-q)^k}{(q^{\nu+1};q)_k} t^{k+\nu}.$$

Підрахуємо узагальнені моменти

$$s_k = \int\limits_0^1 x_k(t) d_q t = \frac{(1-q)^{k+1}}{(q^{\nu+1};q)_k} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(k+\nu+1)} = \frac{(1-q)^{k+1}}{(q^{\nu+1};q)_{k+1}}, \quad k = \overline{0,\infty}. \tag{53}$$

Відповідна функція має вигляд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-q)^{k+1} z^k}{(q^{\nu+1};q)_{k+1}} = \frac{{}_1\Phi_1 \left[\begin{matrix} q; & (1-q)z \\ q^{\nu+1} & \end{matrix} \right] - 1}{z}.$$

Отримуємо наступний результат.

Теорема 17 [27]. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k = \frac{(1-q)^{k+1}}{(q^{\nu+1};q)_{k+1}},\ k=\overline{0,\infty},$$

коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z) = \frac{{}_1\Phi_1\left[\begin{array}{ll} q; & (1-q)z \\ q^{\nu+1} & \end{array}\right] - 1}{z}$$

при $|q|<1$, $\nu>-1$, має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $(L[0,1]\cap C(0,1])\times C[0,1]$

$$s_{k+j} = \int\limits_0^1 \frac{(1-q)^k}{(q^{\nu+1};q)_k} t^{k+\nu}\cdot \frac{(1-q)^j (tq;q)_j}{(q;q)_j} d_q t,\ k,j=\overline{0,\infty}.$$

Введемо додаткові позначення:

$$(a;q)_\infty := \lim_{k\to\infty}(a;q)_k = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k),$$

$$\Gamma_q(t) := \frac{(q;q)_\infty}{(q^t;q)_\infty}(1-q)^{1-t}.$$

Функція $\Gamma_q(t)$ називається q-гама–функцією (див. [119]). Очевидно, що

$$\Gamma_q(n+1) = \frac{(1-q)(1-q^2)\cdot\ldots\cdot(1-q^n)}{(1-q)^n} = n_q!$$

Розглянемо в просторі $\mathscr{X} = L[0,1]\cap C(0,1]$ при деякому $\rho>0$ лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t) = \frac{t^{1/\rho}}{\Gamma_q(1/\rho)}\int\limits_0^1 \frac{(\tau q;q)_\infty}{(\tau q^{1/\rho};q)_\infty}\varphi(t\tau)d_q\tau.$$

Покладаючи $x_0(t) = \dfrac{t^{\mu_1-1}}{\Gamma_q(\mu_1)}$, $\mathscr{Y} = L[0,1]\cap C[0,1)$, $\langle x,y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)d_q t$, а також

$$y_0(t) = \frac{(tq;q)_\infty}{\Gamma_q(\mu_2)(tq^{\mu_2};q)_\infty},$$

де $\mu_1,\mu_2>0$, $\mu_1+\mu_2=\mu$, отримаємо:

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \frac{t^{k/\rho+\mu_1-1}}{\Gamma_q(k/\rho+\mu_1)},\quad k=\overline{0,\infty},$$

$$y_j(t) = (A^{*j} y_0)(t) = \frac{(tq;q)_\infty}{\Gamma_q(j/\rho + \mu_2)(tq^{j/\rho+\mu_2};q)}, \quad j = \overline{0,\infty}.$$

Відповідні узагальнені моменти

$$s_k = \int\limits_0^t x_k(t) y_0(t) d_q t = \frac{1}{\Gamma_q(k/\rho + \mu)}, \quad k = \overline{0,\infty}. \tag{54}$$

Твірну функцію послідовності (54)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(\Gamma_q(k/\rho + \mu)} \tag{55}$$

можна розглядати як q-аналог функції типу Міттаг–Леффлера (15).

Теорема 18 [27]. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k = \frac{1}{\Gamma_q(k/\rho + \mu)}, \ k = \overline{0,\infty},$$

коефіцієнтів степеневого розкладу функції q-аналога функції типу Міттаг-Леффлера (55) при $0 < \rho < \infty$, $\mu > 0$, має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $(L[0,1] \cap C(0,1]) \times (L[0,1] \cap C[0,1))$

$$s_{k+j} = \int\limits_0^1 \frac{t^{k/\rho+\mu_1-1}}{\Gamma_q(k/\rho + \mu_1)} \cdot \frac{(tq;q)_\infty}{\Gamma_q(j/\rho + \mu_2)(tq^{j/\rho+\mu_2};q)}, \ k,j = \overline{0,\infty},$$

де $\mu_1, \mu_2 > 0$, $\mu_1 + \mu_2 = \mu$.

Розглянемо в просторі $\mathscr{X} = L[0,1] \cap C(0,1]$ лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t) = \varkappa \int\limits_0^t \varphi(\tau) d_q \tau + t\varphi(t). \tag{56}$$

Його резольвентна функція є розв'язком q-інтегрального рівняння

$$\varphi(t) - \varkappa z \int\limits_0^t \varphi(\tau) d_q \tau - zt\varphi(t) = \psi(t). \tag{57}$$

Застосуємо до (57) оператор q-диференціювання (42)

$$(1 - zqt)\frac{d_q}{d_q t}\varphi(t) - z(1+\varkappa)\varphi(t) = \frac{d_q}{d_q t}\psi(t). \tag{58}$$

Користуючись означенням q-похідної, отримаємо розв'язок однорідного рівняння

$$\varphi(t) = \varphi(0) \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1 - ztq^{m+1}}{1 - ztq^m(1 + \varkappa - \varkappa q)}.$$

Позначимо

$$\sigma(t)=\prod_{m=0}^{\infty}\frac{1-tq^{m+1}}{1-tq^m(1+\varkappa-\varkappa q)}$$

і будемо шукати розв'язок рівняння (58) у вигляді

$$\varphi(t)=C(t)\sigma(zt). \tag{59}$$

Підставляючи (59) до (58), отримаємо

$$\frac{d_q}{d_qt}C(t)=\frac{\frac{d_q}{d_qt}\psi(t)}{(1-zqt)\sigma(zqt)},$$

звідки

$$C(t)=\int\limits_0^t\frac{\frac{d_q}{d_q\tau}\psi(\tau)}{(1-zq\tau)\sigma(zq\tau)}d_q\tau+C_0=$$

$$=\frac{\psi(t)}{(1-zt)\sigma(zt)}-\frac{\psi(0)}{\sigma(0)}-\int\limits_0^t\psi(t)\frac{d_q}{d_q\tau}\left\{\frac{1}{(1-z\tau)\sigma(z\tau)}\right\}d_q\tau+C_0=$$

$$=\frac{\psi(t)}{(1-zt)\sigma(zt)}-\frac{\psi(0)}{\sigma(0)}+\varkappa z\int\limits_0^t\frac{\psi(\tau)}{(1-zt)(1-z\tau(1+\varkappa-\varkappa q))\sigma(zt)}d_q\tau+C_0. \tag{60}$$

З (59) та (60) маємо

$$\varphi(t)=\frac{\psi(t)}{1-zt}-\frac{\psi(0)}{\sigma(0)}\sigma(zt)+$$

$$+\varkappa z\int\limits_0^t\frac{\psi(\tau)\sigma(zt)}{(1-z\tau)(1-z\tau(1+\varkappa-\varkappa q))\sigma(z\tau)}d_q\tau+C_0\sigma(zt).$$

З (57) випливає, що $\varphi(0)=\psi(0)$, отож

$$\left(R_z^{\#}(A)\psi\right)(t)=\frac{\psi(t)}{1-zt}+\varkappa z\int\limits_0^t\frac{\psi(\tau)\sigma(zt)}{(1-z\tau)(1-z\tau(1+\varkappa-\varkappa q))\sigma(z\tau)}d_q\tau. \tag{61}$$

Використовуючи тотожність (36), отримаємо

$$\frac{\sigma(zt)}{(1-z\tau)(1-z\tau(1+\varkappa-\varkappa q))\sigma(z\tau)}=$$

$$=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1-ztq^{n+1}}{1-ztq^n(1+\varkappa-\varkappa q)}\times\prod_{m=0}^{\infty}\frac{1-z\tau q^{m+1}(1+\varkappa-\varkappa q)}{1-z\tau q^m}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_n}{(q;q)_n}(zt(1+\varkappa-\varkappa q))^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q(1+\varkappa-\varkappa q);q)_m}{(q;q)_m}(z\tau)^m=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{n=0}^{k} \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_n}{(q;q)_n} (t(1+\varkappa-\varkappa q))^n \frac{(q(1+\varkappa-\varkappa q);q)_{k-n}}{(q;q)_{k-n}} \tau^{k-n}. \tag{62}$$

На основі (61) та (62) отримаємо вирази для степенів оператора (56)

$$(A^k\varphi)(t) = \varkappa \int_0^t \varphi(\tau) \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_n (q(1+\varkappa-\varkappa q);q)_{k-1-n}}{(q;q)_n (q;q)_{k-1-n}} \times$$

$$\times (t(1+\varkappa-\varkappa q))^n \tau^{k-1-n} d_q\tau + t^k \varphi(t), \quad k = \overline{1,\infty}.$$

Покладемо $\mathscr{Y} = C[0,1]$, $\langle x, y\rangle = \int_0^1 x(t)y(t)d_qt$. Степені спряженого оператора на основі формули (49) можна записати у вигляді

$$(A^{*j}\psi)(t) = \varkappa \int_{qt}^1 \psi(\tau) \sum_{n=0}^{j-1} \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_n (q(1+\varkappa-\varkappa q);q)_{j-1-n}}{(q;q)_n (q;q)_{j-1-n}} \times$$

$$\times (\tau(1+\varkappa-\varkappa q))^n t^{j-1-n} d_q\tau + t^j \psi(t), \quad j = \overline{1,\infty}.$$

Покладемо $x_o(t) \equiv 1$. Тоді

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) =$$

$$= t^k + \varkappa \int_0^t \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_n (q(1+\varkappa-\varkappa q);q)_{k-1-n}}{(q;q)_n (q;q)_{k-1-n}} (t(1+\varkappa-\varkappa q))^n \tau^{k-1-n} d_q\tau =$$

$$= t^k + \varkappa(1-q)t^k \sum_{n=0}^{k-1} \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_n (q(1+\varkappa-\varkappa q);q)_{k-1-n}}{(q;q)_n (q;q)_{k-n}} (1+\varkappa-\varkappa q)^n =$$

$$= t^k \left\{ 1 - \sum_{n=0}^{k} \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_n (1+\varkappa-\varkappa q);q)_{k-n}}{(q;q)_n (q;q)_{k-n}} (1+\varkappa-\varkappa q)^n + \right.$$

$$\left. + \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_k}{(q;q)_k} (1+\varkappa-\varkappa q)^k \right\}.$$

Розглянемо твірну функцію

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{n=0}^{k} \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_n (1+\varkappa-\varkappa q;q)_{k-n}}{(q;q)_n (q;q)_{k-n}} (1+\varkappa-\varkappa q)^n = \frac{\sigma(z)}{\sigma(z)(1-z)} = \frac{1}{1-z}.$$

Таким чином,

$$x_k(t) = \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_k}{(q;q)_k} (1+\varkappa-\varkappa q)^k t^k, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Аналогічно, покладаючи $y_0(t) \equiv 1$, отримаємо

$$y_j(t) = (A^{*j} y_0)(t) =$$

$$= \varkappa \int\limits_{qt}^{1} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_n (q(1+\varkappa-\varkappa q);q)_{j-1-n}}{(q;q)_n (q;q)_{j-1-n}} (\tau(1+\varkappa-\varkappa q))^n t^{j-1-n} d_q\tau + t^j =$$

$$= \varkappa(1-q) \sum_{n=0}^{j-1} \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_n (q(1+\varkappa-\varkappa q);q)_{j-1-n}}{(q;q)_n (q;q)_{j-1-n}} \times$$

$$\times (1+\varkappa-\varkappa q)^n \frac{t^{j-1-n}}{1-q^{n+1}} - \varkappa(1-q) q t^j \sum_{n=0}^{j-1} \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_n (q(1+\varkappa-\varkappa q);q)_{j-1-n}}{(q;q)_n (q;q)_{j-1-n}} \times$$

$$\times (1+\varkappa-\varkappa q)^n \frac{q^n}{1-q^{n+1}} + t^j =$$

$$= \varkappa(1-q) \sum_{n=1}^{j} \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_{n-1} (q(1+\varkappa-\varkappa q);q)_{j-n}}{(q;q)_n (q;q)_{j-n}} (1+\varkappa-\varkappa q)^{n-1} t^{j-n} +$$

$$+ t^j \left\{ 1 - \varkappa(1-q) q \sum_{n=1}^{j} \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_{n-1} (q(1+\varkappa-\varkappa q);q)_{j-n}}{(q;q)_n (q;q)_{j-n}} (1+\varkappa-\varkappa q)^n q^n \right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{j} \frac{(\frac{1}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_n (q(1+\varkappa-\varkappa q);q)_{j-n}}{(q;q)_n (q;q)_{j-n}} (1+\varkappa-\varkappa q)^n t^{j-n}.$$

Відповідні узагальнені моменти дорівнюють

$$s_k = \int\limits_{0}^{1} x_k(t) d_q t = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_k}{(q;q)_k} \times$$

$$\times (1+\varkappa-\varkappa q)^k q^{kn+n} = \frac{(1-q)(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_k (1+\varkappa-\varkappa q)^k}{(q;q)_{k+1}} =$$

$$= \frac{(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_k (1+\varkappa-\varkappa q)^k}{(q^2;q)_k}, \quad k = \overline{0,\infty}. \tag{63}$$

Таким чином, побудовано узагальнене моментне зображення послідовності коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = {}_2\Phi_1 \left[\begin{matrix} q; & \frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q}; & (1+\varkappa-\varkappa q)z \\ & q^2 & \end{matrix} \right].$$

Теорема 19 [27]. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k = \frac{\left(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q\right)_k (1+\varkappa-\varkappa q)^k}{,} (q^2;q)_k, \ k = \overline{0,\infty},$$

коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = {}_2\Phi_1 \left[\begin{matrix} q; & \frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q}; & (1+\varkappa-\varkappa q)z \\ & q^2 & \end{matrix} \right]$$

при $|q| < 1$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $(L[0,1] \cap C(0,1]) \times C[0,1]$

$$s_{k+j} = \int_0^1 \frac{\left(\frac{q}{1+\varkappa-\varkappa q};q\right)_k (1+\varkappa-\varkappa q)^k}{(q;q)_k} t^k \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{j} \frac{\left(\frac{1}{1+\varkappa-\varkappa q};q\right)_n (q(1+\varkappa-\varkappa q);q)_{j-n}}{(q;q)_n (q;q)_{j-n}} (1+\varkappa-\varkappa q)^n t^{j-n} d_q t, \ k,j=\overline{0,\infty}.$$

Покладемо тепер $x_0(t) = t^\nu$, $\nu > -1$. Тоді

$$x_k(t) = \frac{(\frac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_k}{(q^{\nu+1};q)_k}(1+\varkappa-\varkappa q)^k t^{k+\nu}, \quad k=\overline{0,\infty}.$$

Залишаючи $y_j(t)$, $j=\overline{0,\infty}$, тими ж самими, отримаємо

$$s_k = \int_0^1 x_k(t) d_q t = (1-q)\frac{(\frac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q};q)_k (1+\varkappa-\varkappa q)^k}{(q^{\nu+1};q)_{k+1}}, \quad k=\overline{0,\infty}, \tag{64}$$

і відповідна функція матиме вигляд:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \frac{1-q}{1-q^{\nu+1}} \ {}_2\Phi_1 \left[\begin{matrix} q; & \frac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q}; & (1+\varkappa-\varkappa q)z \\ & q^{\nu+2} & \end{matrix} \right].$$

Таким чином отримаємо наступний результат.

Теорема 20 [27]. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k = (1-q)\frac{\left(\frac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q};q\right)_k (1+\varkappa-\varkappa q)^k}{,}(q^{\nu+1};q)_k, \ k=\overline{0,\infty},$$

коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \frac{1-q}{1-q^{\nu+1}} \ {}_2\Phi_1 \left[\begin{matrix} q; & \frac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q}; & (1+\varkappa-\varkappa q)z \\ & q^{\nu+2} & \end{matrix} \right]$$

при $|q| < 1$, $\nu > -1$, має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $(L[0,1] \cap C(0,1]) \times C[0,1]$

$$s_{k+j} = \int_0^1 \frac{\left(\frac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q};q\right)_k (1+\varkappa-\varkappa q)^k}{(q^{\nu+1};q)_k} t^{k+\nu} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{j} \frac{\left(\frac{1}{1+\varkappa-\varkappa q};q\right)_n (q(1+\varkappa-\varkappa q);q)_{j-n}}{(q;q)_n (q;q)_{j-n}} (1+\varkappa-\varkappa q)^n t^{j-n} d_q t, \ k,j=\overline{0,\infty}.$$

§ 3. Узагальнені моментні зображення деяких елементарних функцій

Розглянемо в просторі $\mathscr{X} = L[0,1]$ лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t) = t\varphi(1-t).$$

Легко бачити, що його квадрат зображуваний у вигляді

$$(A^2\varphi)(t) = t(1-t)\varphi(t).$$

Резольвентна функція оператора A^2 має вигляд

$$(R_z^{\#}(A^2)\varphi)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (A^{2k}\varphi)(t) = \frac{\varphi(t)}{1-zt(1-t)}. \tag{65}$$

Оскільки має місце тотожність

$$R_z^{\#}(A^2) = R_{-\sqrt{z}}^{\#}(A) R_{\sqrt{z}}^{\#}(A),$$

то, очевидно,

$$R_{\sqrt{z}}^{\#}(A) = (I + \sqrt{z}A) R_z^{\#}(A^2). \tag{66}$$

Отож, з (65) маємо

$$(R_z^{\#}(A)\varphi)(t) = \frac{\varphi(t) + zt\varphi(1-t)}{1-z^2t(1-t)}.$$

Степені оператора A та спряженого до нього по відношенню до білінійної форми

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$$

оператора A^* дорівнюють:

$$(A^k\varphi)(t) = \begin{cases} t^m(1-t)^m\varphi(t), & \text{якщо} \quad k = 2m - \ \text{парне}, \\ t^{m+1}(1-t)^m\varphi(1-t), & \text{якщо} \quad k = 2m+1 - \ \text{непарне}; \end{cases}$$

$$(A^{*j}\psi)(t) = \begin{cases} t^n(1-t)^n\psi(t), & \text{якщо} \quad j = 2n - \ \text{парне}, \\ t^n(1-t)^{n+1}\psi(1-t), & \text{якщо} \quad j = 2n+1 - \ \text{непарне}. \end{cases}$$

Покладемо $x_0(t) \equiv 1$, $y_0(t) \equiv 1 \in C[0,1]$. Тоді

$$f(z) = \int\limits_0^1 (R_z^{\#}(A)x_0)(t)y_0(t)dt = \int\limits_0^t \frac{1+zt}{1-z^2t(1-t)}dt = \frac{2(2+z)}{z\sqrt{4-z^2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{4-z^2}}.$$

Отож, встановлено наступний результат.

Теорема 21 [165]. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z) = \frac{2(2+z)}{z\sqrt{4-z^2}} \mathrm{arctg} \frac{z}{\sqrt{4-z^2}}$$

має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $L[0,1] \times C[0,1]$

$$s_{k+j} = \int\limits_0^1 x_k(t) y_j(t) dt, \ k, j = \overline{0, \infty},$$

де

$$x_k(t) = \begin{cases} t^m(1-t)^m, & \text{якщо} \quad k = 2m - \text{ парне}, \\ t^{m+1}(1-t)^m, & \text{якщо} \quad k = 2m+1 - \text{ непарне}; \end{cases} \tag{67}$$

$$y_j(t) = \begin{cases} t^n(1-t)^n, & \text{якщо} \quad j = 2n - \text{ парне}, \\ t^n(1-t)^{n+1}, & \text{якщо} \quad j = 2n+1 - \text{ непарне}. \end{cases} \tag{68}$$

Покладемо тепер при тому ж $y_0(t)$

$$x_0(t) = \begin{cases} \varphi(t), & , t \in [0, 1/2], \\ \varphi(1-t), & t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

де $\varphi(t)$ – деяка невід'ємна функція з $L[0, 1/2]$. Тоді

$$f(z) = 2 \int\limits_0^{1/2} \frac{1+zt}{1-z^2t(1-t)} \varphi(t) dt. \tag{69}$$

Теорема 22 [165]. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z) = 2 \int\limits_0^{1/2} \frac{1+zt}{1-z^2t(1-t)} d\mu(t),$$

де $\mu(t)$ - неспадна функція, що має нескінченну кількість точок зростання на $[0, 1/2]$, має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $L[0,1] \times C[0,1]$

$$s_{k+j} = \int\limits_0^{1/2} x_k(t) y_j(t) d\mu(t), \ k, j = \overline{0, \infty},$$

де функції $x_k(t)$, $k = \overline{0, \infty}$, та $y_j(t)$, $j = \overline{0, \infty}$, визначаються за формулами (67)-(68).

Розглянемо тепер в просторі $\mathscr{X} = C[0,1]$ лінійний обмежений оператор

$$(A\varphi)(t) = \int\limits_0^{1-t} \varphi(\tau) d\tau. \tag{70}$$

Його квадрат може бути зображений у вигляді

$$(A^2\varphi)(t) = (1-t)\int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau + \int\limits_t^1 \varphi(\tau)(1-\tau)d\tau. \tag{71}$$

Покладемо $x_0(t) \equiv 1$ і знайдемо $(R_z^{\#}(A^2)x_0)(t)$ з операторного рівняння

$$((I - zA^2)\varphi)(t) = \varphi(z) - z(1-t)\int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau - z\int\limits_t^1 \varphi(\tau)(1-\tau)d\tau = 1. \tag{72}$$

Послідовно двічі продиференціюємо рівність (72):

$$\varphi'(t) + z\int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau = 0, \tag{73}$$

$$\varphi''(t) + z\varphi(t) = 0. \tag{74}$$

Загальний розв'язок рівняння (74) може бути зображений у вигляді

$$\varphi(t) = C_1 \cos\sqrt{z}t + C_2 \sin\sqrt{z}t. \tag{75}$$

З (72) та (73) отримаємо граничні умови

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi'(0) = 0. \tag{76}$$

Беручи до уваги (75) та (76), будемо мати

$$(R_z^{\#}(A^2)x_0)(t) = \frac{\cos\sqrt{z}t}{\cos\sqrt{z}}. \tag{77}$$

Покладаючи $y_0(t) \equiv 1 \in \mathscr{Y} = C[0,1]$, будуємо функцію

$$f(z) = \int\limits_0^1 (R_z^{\#}(A^2)x_0)(t)y_0(t)dt = \int\limits_0^1 \frac{\cos\sqrt{z}t}{\cos\sqrt{z}}dt = \frac{\mathrm{tg}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}. \tag{78}$$

Враховуючи розклад

$$\frac{\cos\sqrt{z}t}{\cos\sqrt{z}} = \cos\sqrt{z}t \cdot \sec\sqrt{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k t^{2k}}{(2k)!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{E_m z^m}{(2m)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m t^{2m} E_{k-m}}{(2m)!(2k-2m)!},$$

де E_k – числа Ейлера (див. [98, с. 607]), що визначаються формулами

$$E_k = \frac{2^{2k+2}(2k)!}{\pi^{2k+1}} \left\{ 1 - \frac{1}{3^{2k+1}} + \frac{1}{5^{2k+1}} - \frac{1}{7^{2k+1}} + \cdots \right\}, \tag{79}$$

ми отримуємо

$$x_{2k}(t) = \sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m t^{2m} E_{k-m}}{(2m)!(2k-2m)!}, \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{80}$$

А оскільки оператор (70), як легко переконатись, є самоспряженим по відношенню до білінійної форми $\langle x, y \rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt$, то отримаємо також

$$y_{2j}(t) = x_{2j}(t) = \sum_{m=0}^{j} \frac{(-1)^m t^{2m} E_{j-m}}{(2m)!(2j-2m)!}, \quad j = \overline{0, \infty}. \tag{81}$$

Отож, отримуємо наступний результат.

Теорема 23 [165]. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z) = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $C[0,1] \times C[0,1]$

$$s_{k+j} = \int\limits_0^1 \sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m t^{2m} E_{k-m}}{(2m)!(2k-2m)!} \cdot \sum_{n=0}^{j} \frac{(-1)^n t^{2n} E_{j-n}}{(2n)!(2j-2n)!} dt, \ k, j = \overline{0, \infty}.$$

В теоремі 23 ми побудували узагальнене моментне зображення послідовності коефіцієнтів степеневого розкладу функції (78), грунтуючись на застосуванні квадрата оператора (70). Тепер будемо застосовувати безпосередньо сам оператор (70). При $x_0(t) \equiv 1$, враховуючи (66) та (77), отримаємо

$$(R_z^{\#}(A)x_0)(t) = \{(I + zA)R_{z^2}^{\#}(A^2)x_0\}(t) =$$

$$= \frac{\cos zt}{\cos z} + z \int\limits_0^{1-t} \frac{\cos z\tau}{\cos z} d\tau = \frac{\cos zt + \sin z(1-t)}{\cos z}.$$

Покладаючи $y_0(t) \equiv 1$, матимемо функцію

$$f(z) = \int\limits_0^t (R_z^{\#}(A)x_0)(t) y_0(t) dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{\cos zt + \sin z(1-t)}{\cos z} dt = \frac{\sin z + 1 - \cos z}{z \cos z}.$$

Для побудови відповідного узагальненого моментного зображення залишилось записати послідовності $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$, $\{y_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$. Для парних показників ми вже маємо формули (80)–(81). З цих же формул легко отримати і формули для непарних показників

$$x_{2k+1}(t) = (Ax_{2k})(t) = \sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m (1-t)^{2m+1} E_{k-m}}{(2m+1)!(2k-2m)!}, \quad k = \overline{0,\infty}, \tag{82}$$

$$y_{2j+1}(t) = x_{2j+1}(t) = \sum_{m=0}^{j} \frac{(-1)^m (1-t)^{2m+1} E_{j-m}}{(2m+1)!(2j-2m)!}, \quad j = \overline{0,\infty}. \tag{83}$$

Тим самим встановлено наступний результат.

Теорема 24 [165]. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z) = \frac{\sin z + 1 - \cos z}{z \cos z}$$

має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $C[0,1] \times C[0,1]$

$$s_{k+j} = \int_0^1 x_k(t) y_j(t) dt, \; k, j = \overline{0,\infty},$$

де

$$x_k(t) = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{p} \frac{(-1)^m t^{2m} E_{p-m}}{(2m)!(2p-2m)!}, & \text{якщо} \quad k = 2p - \text{ парне}, \\ \sum\limits_{m=0}^{p} \frac{(-1)^m (1-t)^{2m+1} E_{p-m}}{(2m+1)!(2p-2m)!}, & \text{якщо} \quad k = 2p+1 - \text{ непарне}, \end{cases}$$

а $y_j(t) = x_j(t)$, $j = \overline{0,\infty}$.

§ 4. Узагальнені моментні зображення з оператором зсуву

В гільбертовому просторі $\mathscr{H} = L_2(-\infty, \infty)$ розглянемо лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t) = \varphi(t+\lambda), \quad 0 < \lambda < \infty. \tag{84}$$

Як легко переконатися, степені оператора (84) та спряженого до нього відносно білінійної форми

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) dt$$

оператора A^* мають зображення

$$(A^k \varphi)(t) = \varphi(t + k\lambda), \quad k = \overline{0,\infty},$$

$$(A^{*j} \psi)(t) = \psi(t - j\lambda), \quad j = \overline{0,\infty}.$$

Покладемо тепер

$$x_0(t) = \exp\{-\alpha(t+\gamma)^2\}, \quad 0<\alpha<\infty, \quad -\infty<\gamma<\infty,$$

$$y_0(t) = \exp\{-\beta t^2\}, \quad 0<\beta<\infty.$$

Тоді отримаємо

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \exp\{-\alpha(t+k\lambda+\gamma)^2\}, \quad k=\overline{0,\infty},$$

$$y_j(t) = (A^{*j} y_0)(t) = \exp\{-\beta(t-j\lambda)^2\}, \quad j=\overline{0,\infty}.$$

Відповідні узагальнені моменти дорівнюють

$$s_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_k(t)y_0(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha(t+k\lambda+\gamma)^2 - \beta t^2\}dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left(\sqrt{\alpha+\beta}t + \frac{\alpha(\gamma+k\lambda)}{\sqrt{\alpha+\beta}}\right)^2 - \frac{\alpha\beta(\gamma+k\lambda)^2}{\alpha+\beta}\right\}dt =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha+\beta}} \exp\left\{-\frac{\alpha\beta(\gamma+k\lambda)^2}{\alpha+\beta}\right\}, \quad k=\overline{0,\infty}.$$

Ми отримали наступний результат.

Теорема 25. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha+\beta}} \exp\left\{-\frac{\alpha\beta(\gamma+k\lambda)^2}{\alpha+\beta}\right\}, \quad k=\overline{0,\infty},$$

при $0<\alpha<\infty$, $0<\beta<\infty$, $-\infty<\gamma<\infty$, $0<\lambda<\infty$, має місце узагальнене моментне зображення в гільбертовому просторі $L_2(-\infty,\infty)$

$$s_{k+j} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha(t+k\lambda+\gamma)^2\} \cdot \exp\{-\beta(t-j\lambda)^2\}dt, \ k,j=\overline{0,\infty}.$$

§ 5. Узагальнені моментні зображення, пов'язані з дробово-лінійними перетвореннями

Розглянемо у просторі $\mathscr{X} = C[0,1]$ лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t) = \varphi\left(\frac{t}{(1-\gamma)t+\gamma}\right), \quad 0<\gamma<\infty. \tag{85}$$

Оскільки дробово–лінійне відображення

$$\sigma(t) = \frac{t}{(1-\gamma)t+\gamma}$$

при кожному $0 < \gamma < \infty$ є диффеоморфізмом відрізка $[0, 1]$ на себе, то визначений зображенням (85) оператор відображає простір $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$. Неважко підрахувати, що

$$(A^k \varphi)(t) = \varphi \left(\frac{t}{(1-\gamma^k)t + \gamma^k} \right), \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Покладемо

$$x_0(t) = \frac{t}{(1-\delta)t + \delta}, \quad 0 < \delta < \infty.$$

Тоді

$$x_k(t) = (A^k x_0)(t) = \frac{t}{(1-\delta\gamma^k)t + \delta\gamma^k}, \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{86}$$

Покладемо тепер $\mathscr{Y} = \mathscr{X}^*$ - простір лінійних неперервних функціоналів на $\mathscr{X}$. Визначимо на $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ білінійну форму

$$\langle x, y \rangle = y(x)$$

і візьмемо

$$y_0(x) = x(t_0),$$

де $t_0 \in (0, 1)$. Тоді отримаємо

$$s_k = y_0(x_k) = x_k(t_0) = \frac{t_0}{(1-\delta\gamma^k)t_0 + \delta\gamma^k}, \quad k = \overline{0, \infty}. \tag{87}$$

Неважко переконатись, що, якщо позначити

$$t_j := \frac{t_0}{(1-\gamma^j)t_0 + \gamma^j}, \quad j = \overline{0, \infty}, \tag{88}$$

і визначити лінійні неперервні функціонали

$$y_j(x) = x(t_j) = x \left(\frac{t_0}{(1-\gamma^j)t_0 + \gamma^j} \right), \quad j = \overline{0, \infty}, \tag{89}$$

то ми отримаємо узагальнене моментне зображення

$$s_{k+j} = y_j(x_k), \quad k, j = \overline{0, \infty},$$

послідовності (87).

Теорема 26 [166]. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k = \frac{t_0}{(1-\delta\gamma^k)t_0 + \delta\gamma^k}, \quad k = \overline{0, \infty},$$

де $0 < \gamma < \infty$, $0 < \delta < \infty$, $t_0 \in (0, 1)$, має місце узагальнене моментне зображення в банаховому просторі $\mathscr{X} = C[0, 1]$

$$s_{k+j} = y_j(x_k), \; k, j = \overline{0, \infty},$$

де

$$x_k(t) = \frac{t}{(1-\delta\gamma^k)t + \delta\gamma^k}, \quad k = \overline{0,\infty},$$

а функціонали $y_j(x)$, $j = \overline{0,\infty}$, визначаються співвідношеннями

$$y_j(x) = x(t_j) = x\left(\frac{t_0}{(1-\gamma^j)t_0 + \gamma^j}\right), \quad j = \overline{0,\infty}.$$

Покладемо тепер $\mathscr{Y} = C[0,1]$ і визначимо білінійну форму на $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$

$$\langle x, y\rangle = \int\limits_0^1 x(t)y(t)dt.$$

Виберемо початкову функцію $y_0(t) \equiv 1$. Тоді матимемо

$$s_k = \int\limits_0^1 x_k(t)y_0(t)dt = \int\limits_0^1 \frac{t}{(1-\delta\gamma^k)t + \delta\gamma^k}dt =$$

$$= \frac{1}{1-\delta\gamma^k} + \frac{(\ln\delta + k\ln\gamma)\delta\gamma^k}{(1-\delta\gamma^k)^2}, \quad k = \overline{0,\infty}. \tag{90}$$

Для побудови узагальненого моментного зображення послідовності (90) залишилось побудувати послідовність

$$y_j(t) = (A^{*j}y_0)(t), \quad j = \overline{0,\infty}.$$

Неважко підрахувати, що

$$(A^*\psi)(t) = \frac{\gamma}{(1-(1-\gamma)t)^2}\psi\left(\frac{\gamma t}{1-(1-\gamma)t}\right).$$

Степені спряженого оператора матимуть зображення

$$(A^{*j}\psi)(t) = \frac{\gamma^j}{(1-(1-\gamma^j)t)^2}\psi\left(\frac{\gamma^j t}{1-(1-\gamma^j)t}\right), \quad j = \overline{0,\infty},$$

і, отже,

$$y_j(t) = (A^{*j}y_0)(t) = \frac{\gamma^j}{(1-(1-\gamma^j)t)^2}, \quad j = \overline{0,\infty}.$$

Отримаємо наступний результат.

Теорема 27 [166]. Для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$s_k = \frac{1}{1-\delta\gamma^k} + \frac{(\ln\delta + k\ln\gamma)\delta\gamma^k}{(1-\delta\gamma^k)^2}, \quad k = \overline{0,\infty},$$

де $0 < \gamma < \infty$, $0 < \delta < \infty$, має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $C[0,1] \times C[0,1]$

$$s_{k+j} = \int\limits_0^1 \frac{t}{(1-\delta\gamma^k)t + \delta\gamma^k} \cdot \frac{\gamma^j}{(1-(1-\gamma^j)t)^2}dt, \; k, j = \overline{0,\infty}.$$

Р О З Д І Л 3
БІОРТОГОНАЛЬНІ ПОЛІНОМИ ТА ТЕОРЕМИ ІНВАРІАНТНОСТІ ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЙ ПАДЕ

§ 1. Загальні властивості біортогональних поліномів

Як вже зазначалося в §5 розділу 1, задача побудови апроксимант Паде функцій, для коефіцієнтів степеневих розкладів яких відомі узагальнені моментні зображення, зводиться до біортогоналізації певних систем функцій. Розглянемо деякі загальні властивості біортогональних поліномів. Зазначимо, що відповідні питання вивчалися рядом дослідників (див., наприклад, [128,175-179,186,217]). В.К. Дзядиком [51] було встановлено наступний результат.

Теорема 1. Нехай $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ – числова послідовність, така що всі її визначники Ганкеля

$$H_N = H_{0,N} = \det\|s_{k+j}\|_{k,j=0}^{N}, \quad N = \overline{0,\infty},$$

відмінні від нуля, і нехай в лінійному просторі $\mathscr{X}$ задана послідовність $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, а в лінійному просторі $\mathscr{Y}$ – послідовність $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$, і при цьому справедливі рівності

$$\langle x_k, y_j\rangle = s_{k+j}, \quad k,j = \overline{0,\infty},$$

де $\langle .,.\rangle$ - білінійна форма, означена на добутку просторів $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Тоді, якщо при кожному $N = \overline{0,\infty}$ побудувати узагальнені поліноми

$$X_0 = \varepsilon_0 x_0, \quad X_N = \varepsilon_N \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_N \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{N+1} \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ s_{N-1} & s_N & \cdots & s_{2N-1} \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_N \end{vmatrix}, \quad N = \overline{1,\infty}, \tag{1}$$

та

$$Y_0 = \varepsilon_0 y_0, \quad Y_N = \varepsilon_N \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_N \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{N+1} \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ s_{N-1} & s_N & \cdots & s_{2N-1} \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_N \end{vmatrix}, \quad N = \overline{1,\infty}, \tag{2}$$

де $\varepsilon_N := (H_N H_{N-1})^{-1/2}$, $N = \overline{0,\infty}$, $H_{-1} := 1$, то будуть виконуватися співвідношення біортогональності

$$\langle X_M, Y_N\rangle = \delta_{M,N}, \quad M,N = \overline{0,\infty}.$$

Доведення. Легко бачити, що $\forall k = \overline{0, N-1}$

$$\langle x_k, Y_N \rangle = \varepsilon_N \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_N \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{N+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{N-1} & s_N & \dots & s_{2N-1} \\ s_k & s_{k+1} & \dots & s_{k+N} \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогічно,

$$\langle X_N, y_j \rangle = 0, \ \forall j = \overline{0, N-1}.$$

Отож залишається обчислити

$$\langle X_N, Y_N \rangle = \langle \varepsilon_N H_{N-1} x_N, Y_N \rangle = \varepsilon_N^2 H_{N-1} H_N = 1.$$

Побудуємо для описаних вище систем біортогональних поліномів тричленні рекурентні співвідношення при додаткових обмеженнях, пов'язаних з узагальненими моментними зображеннями.

Теорема 2. Нехай за умов теореми 1 існує лінійний оператор $A : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ такий, що

$$Ax_k = x_{k+1}, \quad k = \overline{0, \infty},$$

а в просторі $\mathscr{Y}$ - оператор $A^* : \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}$, спряжений до оператора A відносно білінійної форми $\langle ., . \rangle$. Тоді для біортогональних поліномів (1), (2) справедливі наступні рекурентні співвідношення:

$$AX_N = \alpha_N X_{N+1} + \gamma_N X_N + \alpha_{N-1} X_{N-1}, \quad N = \overline{0, \infty}, \tag{3}$$

$$A^* Y_N = \alpha_N Y_{N+1} + \gamma_N Y_N + \alpha_{N-1} Y_{N-1}, \quad N = \overline{0, \infty}, \tag{4}$$

де $\alpha_N = (H_{N-1} H_{N+1})^{1/2} H_N^{-1}, \quad N = \overline{0, \infty}, \quad \alpha_{-1} := 0$, $\gamma_N = \tilde{H}_N H_N^{-1} + \tilde{H}_{N-1} H_{N-1}^{-1}$, а

$$\tilde{H}_N := \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_N \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{N+1} \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ s_{N-1} & s_N & \cdots & s_{2N-1} \\ s_{N+1} & s_{N+2} & \cdots & s_{2N+1} \end{vmatrix}.$$

Доведення. Запишемо X_N у вигляді

$$X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_k. \tag{5}$$

Після застосування до (5) оператора A отримаємо

$$AX_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_{k+1} = \sum_{k=0}^{N+1} d_k^{(N+1)} X_k. \tag{6}$$

Щоб визначити коефіцієнти $d_k^{(N+1)}$, $k = \overline{0, N+1}$, застосуємо до (6) функціонали $\langle ., Y_M \rangle$, $M = \overline{0, \infty}$. Очевидно,

$$\langle AX_N, Y_M \rangle = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad M \geq N+2, \\ d_M^{(N+1)} & \text{при} \quad M = \overline{0, N+1}. \end{cases}$$

З іншого боку,

$$\langle AX_N, Y_M \rangle = \langle X_N, A^* Y_M \rangle = 0 \quad \text{при} \quad N \geq M+2.$$

Прирівняємо в (6) коефіцієнти при x_{N+1}

$$c_N^{(N)} = d_{N+1}^{(N+1)} c_{N+1}^{(N+1)}.$$

Враховуючи, що в силу (1)

$$c_N^{(N)} = \sqrt{\frac{H_{N-1}}{H_N}},$$

отримуємо

$$d_{N+1}^{(N+1)} = \frac{c_N^{(N)}}{c_{N+1}^{(N+1)}} = \frac{\sqrt{H_{N-1} H_{N+1}}}{H_N}.$$

Встановимо формулу для γ_N, $N = \overline{0, \infty}$. Очевидно,

$$\gamma_N = d_N^{(N+1)} = \langle AX_N, Y_N \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_{k+1}, Y_N \right\rangle =$$

$$= \left\langle c_N^{(N)} x_{N+1} + c_{N-1}^{(N)} x_N, Y_N \right\rangle = c_N^{(N)} \langle x_{N+1}, Y_N \rangle + c_{N-1}^{(N)} \langle x_N, Y_N \rangle .$$

З (1) маємо

$$c_{N-1}^{(N)} = \varepsilon_N \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{N-2} & s_N \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{N-1} & s_{N+1} \\ \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots \\ s_{N-1} & s_N & \cdots & s_{2N-3} & s_{2N-1} \end{vmatrix} = \varepsilon_N \tilde{H}_{N-1}.$$

Легко також встановити, що

$$< x_{N+1}, Y_N >= \varepsilon_N \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_N \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{N+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{N-1} & s_N & \dots & s_{2N-1} \\ s_{N+1} & s_{N+2} & \dots & s_{2N+1} \end{vmatrix} = \varepsilon_N \tilde{H}_N.$$

Таким чином, маємо

$$\gamma_N = \sqrt{\frac{H_{N-1}}{H_N}} \frac{1}{\sqrt{H_N H_{N-1}}} \tilde{H}_N + \sqrt{\frac{H_N}{H_{N-1}}} \frac{1}{\sqrt{H_N H_{N-1}}} \tilde{H}_{N-1} = \frac{\tilde{H}_N}{H_N} + \frac{\tilde{H}_{N-1}}{H_{N-1}}.$$

Формула (3) встановлена. Формула (4) встановлюється цілком аналогічно.

Зауваження 1. Теорему 2 встановлено в [26]. В дещо більш вузькому формулюванні аналогічний результат наведено в [5, с. 358] (див. також [141]).

При застосуванні систем біортогональних поліномів до раціональної апроксимації одним з найважливіших є питання знаходження критеріїв невиродженої біортогоналізованості більш ефективних, ніж відмінність від нуля визначників Ганкеля. Перш ніж сформулювати відповідний результат, наведемо наступне означення.

Означення 1 (див. [48, с. 18]). Система заданих на деякій множині $\mathfrak{M}$ метричного простору, що містить принаймні $N+1$ точку, неперервних функцій $\{x_k(t)\}_{k=0}^N$ називається чебишовською на цій множині, якщо будь–який узагальнений поліном

$$P_N(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_k(t),$$

коефіцієнти якого $c_k^{(N)}$, $k = \overline{0, N}$, не дорівнюють нулю одночасно, має на $\mathfrak{M}$ не більш, ніж N різних коренів.

Теорема 3. [18]. Нехай $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}, \{y_j(t)\}_{j=0}^{\infty} \subset C[a,b] \cap L_2([a,b], d\mu)$, $\infty \leq a < b \leq \infty$, функцій, а μ – неспадна функція, що має нескінченну кількість точок зростання. Тоді для того, щоб $\forall M, N = \overline{0, \infty}$ існували поліноми вигляду

$$X_M(t) = \sum_{k=0}^{M} c_k^{(M)} x_k(t)$$

та

$$Y_M(t) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} y_j(t)$$

з відмінними від нуля старшими коефіцієнтами $c_N^{(N)} \neq 0$, $N = \overline{0,\infty}$, для яких виконуються співвідношення біортогональності

$$\int\limits_a^b X_M(t) Y_N(t) d\mu(t) = \delta_{M,N}, \quad M, N = \overline{0,\infty},$$

достатньо, щоб $\forall M, N = \overline{0,\infty}$ системи функцій $\{x_k(t)\}_{k=0}^M$ та $\{y_j(t)\}_{j=0}^N$ були чебишовськими на (a,b).

Доведення. Очевидно , що $\forall M = \overline{1,\infty}$ можна побудувати такий, що не дорівнює тотожно нулеві, узагальнений поліном

$$\tilde{X}_M(t) = \sum_{k=0}^{M} \tilde{c}_k^{(M)} x_k(t),$$

що має властивості

$$\int\limits_a^b \tilde{X}_M(t) y_j(t) d\mu(t) = 0, \quad j = \overline{0, M-1}, \tag{7}$$

адже задача побудови такого полінома еквівалентна розв'язанню однорідної системи M лінійних алгебраїчних рівнянь з $M+1$ невідомим. Припустимо, що поліном $\tilde{X}_M(t)$ має на (a,b) $m < M$ перемін знака в точках $a < t_1 < \ldots < t_m < b$. Користуючись інтерполяційними властивостями чебишовських систем функцій (див. [60, с. 32]), побудуємо в такому разі нетривіальний узагальнений поліном $P_m(t)$ за системою функцій $\{y_j(t)\}_{j=0}^m$, що має прості нулі в точках $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Але тоді добуток $\tilde{X}_M(t) P_m(t)$ буде зберігати знак на (a,b), а отже,

$$\int\limits_a^b \tilde{X}_M(t) P_m(t) d\mu(t) \neq 0,$$

що суперечить (7). Таким чином, поліном $\tilde{X}_M(t)$ має принаймні M перемін знака, а отож і простих нулів на (a,b). Звідси випливає, що $\tilde{c}_M^{(M)} \neq 0$, адже інакше виникло б протиріччя з тим, що чебишовською є система функцій $\{x_k(t)\}_{k=0}^{M-1}$. Крім того, можна зробити висновок, що

$$\int\limits_a^b \tilde{X}_M(t) y_M(t) d\mu(t) \neq 0,$$

оскільки в іншому разі ми побудували б узагальнений поліном $P_M(t)$ за системою функцій $\{y_j(t)\}_{j=0}^M$, що має прості нулі в точках, що є нулями полінома $\tilde{X}_M(t)$, і знову дійшли б протиріччя.

Цілком аналогічно побудуємо такі, що не дорівнюють тотожньо нулеві, узагальнені поліноми $\tilde{Y}_N(t)$, $N=\overline{1,\infty}$, такі що

$$\int\limits_a^b x_k(t)\tilde{Y}_N(t)d\mu(t)=0, \quad k=\overline{0,N-1}.$$

Після цього, щоб знайти поліноми $X_M(t)$, $M=\overline{0,\infty}$, та $Y_N(t)$, $N=\overline{0,\infty}$, що задовольняють умови теореми, досить здійснити нормування поліномів $\tilde{X}_M(t)$ та $\tilde{Y}_N(t)$.

Зауваження 2. Зазначимо, що з доведення теореми 3 випливає не тільки існування біортогональних поліномів $X_M(t)$ та $Y_N(t)$, але і наявність у них відповідно M та N простих нулів на (a,b).

§ 2. Біортогональні поліноми Конхаузера

Ще в XIX сторіччі М. Дідоном [150] та Ж. Дейрутсом [149] було розглянуте питання про біортогоналізацію систем функцій t^k, $k=\overline{0,\infty}$, та t^{pj}, $j=\overline{0,\infty}$, де p - деяке фіксоване натуральне число, $p\geq 2$, на скінченних та нескінченних відрізках дійсної осі відносно деякої позитивної міри $d\mu$. Дж. Конхаузер в роботі [187] побудував системи біортогональних поліномів $\{Z_N^{(\nu)}(t;p)\}_{N=0}^{\infty}$ та $\{Y_M^{(\nu)}(t;p)\}_{M=0}^{\infty}$ вигляду

$$Z_N^{(\nu)}(t;p)=\sum_{k=0}^{N}\xi_k^{(N)}t^{pk},\ N=\overline{0,\infty},$$

$$Y_M^{(\nu)}(t;p)=\sum_{j=0}^{M}\eta_j^{(M)}t^{j},\ M=\overline{0,\infty},$$

для яких виконуються співвідношення

$$\int\limits_0^\infty Z_N^{(\nu)}(t;p)t^{j+\nu}e^{-t}dt=0,\ j=\overline{0,N-1},$$

$$\int\limits_0^\infty Y_M^{(\nu)}(t;p)t^{pk+\nu}e^{-t}dt=0,\ k=\overline{0,M-1},$$

де $\nu>-1$. Надалі ці поліноми отримали назву біортогональних поліномів Конхаузера і вивчалися цілим рядом дослідників [112, 217, 222].

Підхід, оснований на застосуванні узагальнених моментних зображень, дозволяє досить просто отримати явні формули для поліномів Конхаузера $Z_N^{(\nu)}(t;p)$.

Теорема 4. При кожному дійсному $p>-1$ нетривіальні узагальнені поліноми

$$Z_N^{(\nu)}(t;p)=\sum_{k=0}^{N}\xi_k^{(N)}t^{pk},\ N=\overline{0,\infty},$$

для яких виконуються умови біортогональності

$$\int_0^\infty Z_N^{(\nu)}(t;p)t^{j+\nu}e^{-t}dt = 0,\ j = \overline{0, N-1},$$

можуть бути записані у вигляді

$$Z_N^{(\nu)}(t;p) = c_N \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{(-1)^k t^{pk}}{\Gamma(kp+\nu+1)},\ N = \overline{0,\infty},$$

де c_N - ненульова константа.

Доведення. Розглянемо при деякому $\nu > -1$ числову послідовність

$$s_k = \Gamma(k+\nu+1) = (\nu+1)_k \Gamma(\nu+1),\ k = \overline{0,\infty}. \tag{8}$$

З інтегрального зображення для гама-функції [98, с.81] випливає, що послідовність (8) є послідовністю степеневих моментів

$$s_k = \int_0^\infty t^k t^\nu e^{-t} dt,\ k = \overline{0,\infty}.$$

Отож, твірна функція послідовності (8)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(k+\nu+1) z^k = \Gamma(\nu+1)\,{}_2F_0(1, \nu+1; z)$$

є марковською функцією, і знаменники її апроксимант Паде $[N-1/N]_f(z)$ порядків $[N-1/N]$, $N = \overline{1,\infty}$, можуть бути записані у вигляді (див. §1.2)

$$Q_N(z) = z^N A_N(1/z), \tag{9},$$

де $\{A_N(t)\}_{N=0}^{\infty}$ - послідовність алгебраїчних многочленів, ортогональних на $[0,\infty)$ з вагою $e^{-t}t^\nu$. Як відомо (див. [7]), такі ортогональні многочлени називаються многочленами Лагерра і можуть бути з точністю до постійного множника записані у вигляді

$$A_N(t) = L_N(t;\nu) = \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} \frac{(\nu+1)_N}{(\nu+1)_m} (-t)^m. \tag{10}$$

З (9) та (10) маємо

$$Q_N(z) = \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} \frac{(\nu+1)_N}{(\nu+1)_{N-m}} (-1)^{N-m} z^m.$$

Розглянемо тепер лінійний простір $\mathscr{Y}$ неперервних швидко спадаючих на $[0,+\infty)$ функцій, тобто функцій, що спадають при $t \to \infty$ швидше будь-якого степеня $1/t$, і лінійний простір

$\mathscr{X}$ неперервних на $(0,+\infty)$ і інтегровних в околі точки $t=0$ функцій повільного зростання на $[0,+\infty)$, тобто функцій, що зростають при $t\to\infty$ не швидше деякого степеня t. Більш точно,

$$\mathscr{Y}=\left\{y\in C[0,+\infty):\ \forall N>0\ \exists C>0,\ \varepsilon>0,\ |y(t)|\le\frac{C}{|t+\varepsilon|^M},\ \forall t\in[0,+\infty)\right\},$$

$$\mathscr{X}=\{x\in C[0,+\infty):\ \exists t_0\in(0,+\infty),\ x\in L[0,t_0],$$

$$\exists M>0, C>0,\varepsilon>0,\ |x(t)|\le C|t+\varepsilon|^M,\ \forall t\in[t_0,+\infty)\}.$$

Означимо при деякому фіксованому дійсному $p>1$ в просторі $\mathscr{X}$ лінійний оператор за формулою

$$(A\varphi)(t)=\int\limits_0^t\frac{\tau(t-\tau)^{p-2}\varphi(\tau)d\tau}{\Gamma(p-1)}.$$

Означимо також в просторі $\mathscr{Y}$ лінійний оператор A^* за формулою

$$(A^*\psi)(t)=t\int\limits_t^\infty\frac{(\tau-t)^{p-2}\psi(\tau)d\tau}{\Gamma(p-1)}.$$

Неважко переконатись, що, якщо означити на добутку просторів $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ білінійну форму

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\int\limits_0^\infty\varphi(t)\psi(t)dt, \tag{11}$$

то оператор A^* буде спряженим до оператора A відносно цієї форми. Покладемо тепер $x_0(t)=t^\nu$, $\nu>-1$. Очевидно, $x_0\in\mathscr{X}$. Легко підрахувати, що

$$x_k(t)=(A^kx_0)(t)=\frac{\Gamma(\nu+1)\prod\limits_{m=0}^{k-1}(mp+\nu+1)}{\Gamma(kp+\nu+1)}t^{kp+\nu}. \tag{12}$$

Покладемо тепер $y_0(t)=e^{-t}$. Очевидно, $y_0\in\mathscr{Y}$. Прості підрахунки дають

$$y_1(t)=te^{-t},$$

$$y_2(t)=t(t+p-1)e^{-t}.$$

Неважко встановити, що

$$\deg\{y_j(t)e^t\}\equiv j. \tag{13}$$

Підрахуємо узагальнені моменти

$$s_k=\left\langle A^kx_0,y_0\right\rangle=\langle x_k,y_0\rangle=\int\limits_0^\infty\frac{\Gamma(\nu+1)\prod\limits_{m=0}^{k-1}(mp+\nu+1)}{\Gamma(kp+\nu+1)}t^{kp+\nu}e^{-t}dt=$$

$$= \Gamma(\nu+1)\prod_{m=0}^{k-1}(mp+\nu+1) = \Gamma(\nu+1)(\nu+1)(\nu+1+p)\cdot\ldots\cdot(\nu+1+(k+1)p) =$$

$$= \Gamma(\nu+1)p^k\left(\frac{\nu+1}{p}\right)\left(\frac{\nu+1}{p}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{\nu+1}{p}+k-1\right) = p^k\left(\frac{\nu+1}{p}\right)_k\Gamma(\nu+1). \quad (14)$$

Враховуючи попередні міркування, знаменник $\tilde{Q}_N(z)$ апроксиманти Паде порядку $[N-1/N]$ твірної функції послідовності (14) з точністю до постійного множника можна записати у вигляді

$$\tilde{Q}_N(z) = \sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m}\frac{\left(\frac{\nu+1}{p}\right)_N}{\left(\frac{\nu+1}{p}\right)_{N-m}}(-1)^{N-m}(pz)^m.$$

З іншого боку, апроксиманту Паде порядку $[N-1/N]$ вказаної функції можна побудувати з використанням узагальненого моментного зображення (14). Для цього згідно з теоремою 1.1 необхідно біортогоналізувати послідовності $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ та $\{y_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ відносно білінійної форми (11), а саме – побудувати нетривіальні узагальнені поліноми

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_k(t),$$

такі що

$$\int_0^{\infty} X_N(t)y_j(t)dt = 0,\ j=\overline{0,N-1}.$$

Враховуючи (12) і (13), бачимо, що

$$X_N(t) = t^{\nu} Z_N^{(\nu)}(t;p),$$

де $Z_N^{(\nu)}(t;p)$ - біортогональні поліноми Конхаузера. Отож,

$$c_k^{(N)}\frac{\Gamma(\nu+1)\prod\limits_{m=0}^{k-1}(mp+\nu+1)}{\Gamma(kp+\nu+1)} = \xi_k^{(N)}. \quad (15)$$

Знаменник $\tilde{Q}_N(z)$ після цього може бути записаний у вигляді

$$\tilde{Q}_N(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} z^{N-k}. \quad (16)$$

Враховуючи (16), маємо

$$c_k^{(N)} = \binom{N}{k}\frac{\left(\frac{\nu+1}{p}\right)_N}{\left(\frac{\nu+1}{p}\right)_k}(-1)^k p^{N-k}. \quad (17)$$

З (15) та (17) маємо

$$\xi_k^{(N)} = \binom{N}{k} \frac{\left(\frac{\nu+1}{p}\right)_N}{\left(\frac{\nu+1}{p}\right)_k} (-1)^k p^{N-k} \frac{\Gamma(\nu+1) p^k \left(\frac{\nu+1}{p}\right)_k}{\Gamma(kp+\nu+1)} =$$

$$= \binom{N}{k} \frac{\left(\frac{\nu+1}{p}\right)_N (-1)^k p^N \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(kp+\nu+1)},$$

звідки і випливає твердження теореми.

§ 3. Теореми інваріантності для біортогональних поліномів

Перейдемо тепер до встановлення деяких властивостей інваріантності біортогональних поліномів.

Теорема 5 [31]. Нехай в деякому лінійному просторі $\mathscr{X}$ задано лінійний оператор $A: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$. Припустимо також, що при деякому фіксованому $x_0 \in \mathscr{X}$ і деякому фіксованому $y_0 \in \mathscr{Y}$ побудовано послідовність узагальнених поліномів вигляду

$$X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_k = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} A^k x_0 = P_N(A) x_0, \quad N = \overline{0,\infty},$$

які задовольняють умови біортогональності

$$\langle X_N, y_j \rangle = \langle X_N, A^* y_0 \rangle = \delta_{N,j}, \quad j = \overline{0, N-1}, \tag{18}$$

де $A^* : \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}$ - оператор, спряжений до A відносно білінійної форми $\langle .,. \rangle$, визначеної на добутку просторів $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Тоді для кожного $N = \overline{0,\infty}$ нетривіальний поліном $\tilde{X}_N$ вигляду

$$\tilde{X}_N = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} A^k x_0,$$

який задовольняє умови біортогональності

$$\left\langle \tilde{X}_N, \tilde{y}_j \right\rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1}, \tag{19}$$

де $\tilde{y}_j = A^{*j} \tilde{y}_0$, $j = \overline{0,\infty}$, а

$$\tilde{y}_0 = \prod_{m=1}^{M} (1 + \beta_m A^*) y_0, \tag{20}$$

може бути з точністю до постійного множника зображений у вигляді

$$\tilde{X}_N = \prod_{m=1}^{M} (1 + \beta_m A)^{-1} \sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k X_k,$$

де коефіцієнти γ_k, $k = \overline{N, M+N}$, визначаються з однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k P_k^{(n)} \left(-\frac{1}{\beta_m}\right) = 0, \quad n = \overline{0, \rho_m - 1}, \quad m = \overline{1, M^*},$$

де M^* – кількість різних між собою чисел β_m, а ρ_m – кратність числа β_m, $m = \overline{1, M^*}$, в преставленні (20).

Доведення. З (19) та (20) маємо

$$\left\langle \tilde{X}_N, \tilde{y}_j \right\rangle = \left\langle \prod_{m=1}^{M} (1 + \beta_m A) \tilde{X}_N, y_j \right\rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1}.$$

Введемо позначення

$$\Phi_N := \prod_{m=1}^{M} (1 + \beta_m A) \tilde{X}_N = \sum_{k=0}^{M+N} \gamma_k X_k. \tag{21}$$

Отримаємо

$$\left\langle \tilde{X}_N, \tilde{y}_j \right\rangle = \langle \Phi_N, y_j \rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{M+N} \gamma_k X_k, y_j \right\rangle = \gamma_j + \left\langle \sum_{k=0}^{j-1} \gamma_k X_k, y_j \right\rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1}.$$

Звідси робимо висновок, що

$$\gamma_j = 0, \quad j = \overline{0, N-1}.$$

Таким чином,

$$\Phi_N = \sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k X_k.$$

З врахуванням (21) отримаємо

$$\tilde{X}_N = \prod_{m=1}^{M} (1 + \beta_m A)^{-1} \sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k X_k.$$

Скориставшись розкладом

$$(1 + \beta A)^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} (-\beta)^p A^p, \tag{22}$$

отримаємо

$$\tilde{X}_N = \sum_{p_1, \ldots, p_m = 0}^{\infty} (-\beta_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (-\beta_m)^{p_m} A^{p_1 + \ldots + p_M} \sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k \sum_{r=0}^{k} c_r^{(k)} A^r x_0. \tag{23}$$

Оскільки елементи $x_k = A^k x_0$, $k = \overline{0, \infty}$, є лінійно незалежними (інакше була б неможливою невироджена біортогоналізація (18)), то можна прирівняти коефіцієнти при x_k,

$k = \overline{0,\infty}$, в правій та лівій частині (23). Зокрема, коефіцієнти при x_r, $r = \overline{N+1,\infty}$, в правій частині (23) повинні дорівнювати нулеві. Вважаючи, що $M \geq 1$ (випадок $M = 0$ є очевидним), прирівняємо нулеві коефіцієнти при x_{N+M+j}, $j = \overline{0,M}$, в правій частині (23). Отримаємо

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k \sum_{r=0}^{k} c_r^{(k)} \sum_{p_1+\ldots+p_M=N+M+j-r} (-\beta_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (-\beta_M)^{p_M} = 0, \quad j = \overline{0,M}. \tag{24}$$

Введемо до розгляду елементарні симетричні многочлени степеня s від M змінних (див. [61, с. 242])

$$F_s^{(M)}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_M) := \sum_{p_1+\ldots+p_M=s} \xi_1^{p_1} \xi_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot \xi_M^{p_M}. \tag{25}$$

Легко переконатися, що мають місце тотожності

$$F_{s+1}^{(M)}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_M) = \xi_1 F_s^{(M)}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_M) + F_{s+1}^{(M-1)}(\xi_2, \ldots, \xi_M). \tag{26}$$

Рівності (24) з врахуванням (25) можна переписати у вигляді

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k \sum_{r=0}^{k} c_r^{(k)} F_{N+M+j-r}^{(M)}(-\beta_1, \ldots, -\beta_M) = 0, \quad j = \overline{0,M}. \tag{27}$$

Спочатку припустимо, що всі β_m, $m = \overline{1,M}$, різні між собою. Віднімемо від кожного $(j+1)$-го рівняння (27) j-е , $j = \overline{0,M-1}$. Тоді на основі (26) отримаємо

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k \sum_{r=0}^{k} c_k^{(k)} F_{N+M+j-r}^{(M-1)}(-\beta_2, \ldots, -\beta_M) = 0, \quad j = \overline{0,M-1}.$$

Продовжуючи діяти і далі таким же чином, в решті решт прийдемо до рівності

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k \sum_{r=0}^{k} c_r^{(k)} F_{N+M-r}^{(1)}(-\beta_M) = 0,$$

яку з врахуванням (25) можна записати у вигляді

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k \sum_{r=0}^{k} c_r^{(k)} (-\beta_M)^{-r} = 0,$$

або

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k P_k \left(-\frac{1}{\beta_M}\right) = 0.$$

Оскільки умови (27) симетричні відносно $\beta_1, \ldots, \beta_M$, то маємо також

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k P_k \left(-\frac{1}{\beta_m}\right) = 0, \quad m = \overline{1,M}.$$

Припустимо тепер, що серед чисел β_m, $m = \overline{1, M}$, є кратні. Наприклад, деяке число $\beta \in \{\beta_m,\ \ m = \overline{1, M}\}$ має кратність ρ. Розглянемо тоді збурену задачу, в якій замість кратного значення β в зображенні (20) фігурує ρ різних значень β, $\frac{\beta}{1-\beta h}$, $\frac{\beta}{1-2\beta h}$, $\ldots$, $\frac{\beta}{1-(\rho-1)\beta h}$, причому $h > 0$ є настільки малим, що жодне з цих значень не співпадає з іншими числами β_m у вказаному зображенні. Тоді, діючи аналогічно попередньому, дістанемо

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k P_k \left(-\frac{1}{\beta} + jh\right) = 0, \quad j = \overline{0, \rho - 1}.$$

Звідси буде випливати, що також дорівнюють нулеві розділені різниці, а отже, при $h \to 0$ і відповідні похідні

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k P_k^{(n)} \left(-\frac{1}{\beta}\right), \quad n = \overline{0, \rho - 1}.$$

Таким чином теорема 5 доведена.

Теорема 6 [32]. Нехай в деякому лінійному просторі $\mathscr{X}$ задано лінійний оператор $A : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$. Припустимо також, що при деякому фіксованому $x_0 \in \mathscr{X}$ і деякому фіксованому $y_0 \in \mathscr{Y}$ побудовано послідовність узагальнених поліномів вигляду

$$Y_N = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} y_j = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} A^{*j} y_0, \quad N = \overline{0, \infty}, \tag{28}$$

які задовольняють умови біортогональності

$$\langle x_k, Y_N \rangle = \left\langle A^k x_0, Y_N \right\rangle = 0, \quad k = \overline{0, N - 1}, \tag{29}$$

де $A^* : \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}$ - оператор, спряжений до A відносно білінійної форми $\langle ., . \rangle$, визначеної на добутку просторів $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Тоді для кожного $N \geq M + 1$, $M > 0$, нетривіальний поліном $\tilde{Y}_N$ вигляду

$$\tilde{Y}_N = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} y_j,$$

який задовольняє умови біортогональності

$$\left\langle \tilde{x}_k, \tilde{Y}_N \right\rangle = 0, \quad k = \overline{0, N - 1},$$

де $\tilde{x}_k = A^k \tilde{x}_0$, $k = \overline{0, \infty}$, а $\tilde{x}_0$ є розв'язком операторного рівняння

$$\prod_{m=1}^{M^*} (1 - \beta_m A)^{\rho_m} \tilde{x}_0 = x_0, \tag{30}$$

де числа $\beta_m, = \overline{1, M^*}$, різні між собою, а $\sum\limits_{m=1}^{M^*} \rho_m = M$, може бути з точністю до постійного множника зображений у вигляді

$$\tilde{Y}_N = \det \begin{Vmatrix} \varepsilon_{N-M}(\beta_1) & \varepsilon_{N-M+1}(\beta_1) & \dots & \varepsilon_N(\beta_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{N-M}^{(r_1-1)}(\beta_1) & \varepsilon_{N-M+1}^{(r_1-1)}(\beta_1) & \dots & \varepsilon_N^{(r_1-1)}(\beta_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{N-M}^{(r_{M^*}-1)}(\beta_{M^*}) & \varepsilon_{N-M+1}^{(r_{M^*}-1)}(\beta_{M^*}) & \dots & \varepsilon_N^{(r_{M^*}-1)}(\beta_{M^*}) \\ Y_{N-M} & Y_{N-M+1} & \dots & Y_N \end{Vmatrix},$$

де

$$\varepsilon_k(z) = \frac{f(z)Q_k(z) - P_{k-1}(z)}{z^k},$$

а

$$[k-1/k]_f(z) = \frac{P_{k-1}(z)}{Q_k(z)}$$

– апроксиманти Паде функції $f(z) = \left\langle R_z^{\#}(A)x_0, y_0 \right\rangle$ порядків $[k-1/k]$, $k \geq 1$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $r_1 = r_2 = \ldots = r_{M^*} = 1$. Очевидно, $\forall N \geq M+1$ є можливим розклад

$$\tilde{Y}_N = \sum_{r=0}^{N} \gamma_r^{(N)} Y_r. \tag{31}$$

Застосуємо функціонал $\left\langle ., \tilde{Y}_N \right\rangle$, де $\tilde{Y}_N$ визначається рівністю (31), до x_k, $k = \overline{0, N-M-1}$. Отримаємо

$$0 = \sum_{r=0}^{k} \gamma_r^{(N)} \left\langle x_k, Y_r \right\rangle, \quad k = \overline{0, N-M-1}. \tag{32}$$

З огляду на невиродженість біортогоналізації (29) маємо

$$\left\langle x_r, Y_r \right\rangle \neq 0, \quad r = \overline{0, \infty}.$$

Тому з (32) випливає

$$\gamma_r^{(N)} = 0, \quad r = \overline{0, N-M-1}.$$

Таким чином, (31) можна переписати у вигляді

$$\tilde{Y}_N = \sum_{r=N-M}^{N} \gamma_r^{(N)} Y_r. \tag{33}$$

Коефіцієнти $\gamma_r^{(N)}$, $r = \overline{N-M, N}$, з точністю до постійного множника можна визначити з умов ортогональності $\tilde{Y}_N$ до $\tilde{x}_k$, $k = \overline{0, M-1}$:

$$0 = \left\langle \tilde{x}_k, \tilde{Y}_N \right\rangle = \sum_{r=N-M}^{N} \gamma_r^{(N)} \left\langle \tilde{x}_k, Y_r \right\rangle, \quad k = \overline{0, M-1}. \tag{34}$$

З (34) випливає, що

$$\sum_{r=N-M}^{N} \gamma_r^{(N)} \left\langle \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{M} (1 - \beta_m A) \tilde{x}_0, Y_r \right\rangle = 0, \quad k = \overline{1, M}. \tag{35}$$

Розглянемо алгебраїчні многочлени

$$b_k(t) = \prod_{\substack{m=1, \\ m \neq k}}^{M} (1 - \beta_m t).$$

Вони лінійно незалежні. Дійсно, якщо припустити протилежне, то

$$0 \equiv \sum_{k=1}^{M} \eta_k b_k(t) = \sum_{k=1}^{M} \eta_k \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{M} (1 - \beta_m t). \tag{36}$$

Покладемо в (36) $t = 1/\beta_j$, $j = \overline{1, M}$. Отримаємо $\eta_j = 0$, $j = \overline{1, M}$, що суперечить припущенню. Звідси випливає, що умови (34) і (35) еквівалентні. З врахуванням (30) рівності (35) можна переписати у вигляді

$$\sum_{r=N-M}^{N} \gamma_r^{(N)} \left\langle (I - \beta_k A)^{-1} x_0, Y_r \right\rangle = 0, \quad k = \overline{1, M}. \tag{37}$$

Скористаємось тепер формулою (1.18)

$$\begin{aligned} \left\langle (I - \beta_k A)^{-1} x_0, Y_r \right\rangle &= \frac{f(\beta_k) Q_r(\beta_k) - P_{r-1}(\beta_k)}{\beta_k^r} = \\ &= \varepsilon_r(\beta_k), \quad r = \overline{N-M, N}, \ k = \overline{1, M}. \end{aligned} \tag{38}$$

З врахуванням (33), (37) та (38) отримаємо

$$\tilde{Y}_N = \det \begin{Vmatrix} \varepsilon_{N-M}(\beta_1) & \varepsilon_{N-M+1}(\beta_1) & \dots & \varepsilon_N(\beta_1) \\ \varepsilon_{N-M}(\beta_2) & \varepsilon_{N-M+1}(\beta_2) & \dots & \varepsilon_N(\beta_2) \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ \varepsilon_{N-M}(\beta_M) & \varepsilon_{N-M+1}(\beta_M) & \dots & \varepsilon_N(\beta_M) \\ Y_{N-M} & Y_{N-M+1} & \dots & Y_N \end{Vmatrix}$$

Щоб довести теорему в загальному випадку, тобто при наявності кратних β_m, досить спочатку замінити кожне число β_m, що має кратність ρ_m, на ρ_m різних чисел β_m, β_{m+h}, $\dots$, $\beta_{m+(\rho_m-1)h}$, а потім перейти до границі при $h \to 0$.

Теорема 7 [33]. Нехай в деякому лінійному просторі $\mathscr{X}$ задано лінійний оператор $A : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$. Припустимо також, що при деякому фіксованому $x_0 \in \mathscr{X}$ і деякому фіксованому $y_0 \in \mathscr{Y}$ побудовано послідовність узагальнених поліномів вигляду

$$X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_k = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} A^k x_0, \tag{39}$$

які задовольняють умови біортогональності

$$\left\langle X_N, A^{*j} y_0 \right\rangle = \delta_{N,j}, \tag{40}$$

де $A^* : \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}$ - оператор, спряжений до A відносно білінійної форми $\langle .,. \rangle$, визначеної на добутку просторів $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Тоді для кожного $N = \overline{1,\infty}$ нетривіальний поліном $\tilde{X}_N$ вигляду

$$\tilde{X}_N = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} \tilde{x}_k = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} \tilde{A}^k x_0, \tag{41}$$

де

$$\tilde{A}x = Ax + \langle x, \lambda_{00} y_0 + \lambda_{01} y_1 \rangle x_0 + \langle x, \lambda_{10} y_0 + \lambda_{11} y_1 \rangle x_1, \tag{42}$$

який задовольняє умови біортогональності

$$\left\langle \tilde{X}_N, \tilde{y}_j \right\rangle = \left\langle \tilde{X}_N, \tilde{A}^{*j} y_0 \right\rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1}, \tag{43}$$

якщо тільки $1+\lambda_{10}s_0+\lambda_{11}s_1 \neq 0$, може бути з точністю до постійного множника зображений у вигляді

$$\tilde{X}_N = X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} \tilde{x}_k - \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_m \sum_{k=m+1}^{N} c_k^{(N)} \times$$

$$\times \left\{ (\lambda_{00} + \delta s_1) s_{k-m-1} + (\lambda_{01} + \lambda_{10} + \delta s_0) s_{k-m} + \lambda_{11} s_{k-m+1} \right\} + x_0 \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} (\lambda_{10} s_k + \lambda_{11} s_{k+1}), \tag{44}$$

де $\delta = \lambda_{00}\lambda_{11} - \lambda_{01}\lambda_{10}$, а $s_k = \left\langle A^k x_0, y_0 \right\rangle$, $k = \overline{0,\infty}$. При цьому, якщо $N \geq 2$, то остання сума в (44) дорівнює нулю.

Доведення. Неважко зробити висновок, що для елементів $\tilde{x}_k$, $k = \overline{0,\infty}$, мають місце зображення

$$\tilde{x}_k = \sum_{m=1}^{k} d_{k-m} x_m + e_k x_0, \quad k = \overline{0,\infty}. \tag{45}$$

Щоб визначити коефіцієнти d_m, e_m, $m = \overline{0, \infty}$, застосуємо до (45) оператор (42). Отримаємо

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k = \sum_{m=1}^{k} d_{k-m} x_{m+1} + e_k x_1 +$$

$$+ \left\{ \sum_{m=1}^{k} d_{k-m}(\lambda_{00} s_m + \lambda_{01} s_{m+1}) + e_k(\lambda_{00} s_0 + \lambda_{01} s_1) \right\} x_0 +$$

$$+ \left\{ \sum_{m=1}^{k} d_{k-m}(\lambda_{10} s_m + \lambda_{11} s_{m+1}) + e_k(\lambda_{10} s_0 + \lambda_{11} s_1) \right\} x_1 =$$

$$= \sum_{m=1}^{k+1} d_{k+1-m} x_m + e_{k+1} x_0.$$

Звідси маємо

$$e_{k+1} = \sum_{m=1}^{k} d_{k-m}(\lambda_{00} s_m + \lambda_{01} s_{m+1}) + e_k(\lambda_{00} s_0 + \lambda_{01} s_1), \tag{46}$$

$$d_k = e_k + \sum_{m=1}^{k} d_{k-m}(\lambda_{10} s_m + \lambda_{11} s_{m+1}) + e_k(\lambda_{10} s_0 + \lambda_{11} s_1). \tag{47}$$

Розглянемо твірні функції

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k, \quad D(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k.$$

Для них на основі (46), (47) отримаємо рівності

$$E(z) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1} \left\{ \sum_{m=1}^{k} d_{k-m}(\lambda_{00} s_m + \lambda_{01} s_{m+1}) + e_k(\lambda_{00} s_0 + \lambda_{01} s_1) \right\} =$$

$$= 1 + D(z) \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{00} s_m + \lambda_{01} s_{m+1}) z^{m+1} + z(\lambda_{00} s_0 + \lambda_{01} s_1) E(z), \tag{48}$$

$$D(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{m=1}^{k} d_{k-m}(\lambda_{10} s_m + \lambda_{11} s_{m+1}) +$$

$$+ (\lambda_{10} s_0 + \lambda_{11} s_1) \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k = (1 + \lambda_{10} s_0 + \lambda_{11} s_1) E(z) + D(z) \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{10} s_m + \lambda_{11} s_{m+1}) z^m. \tag{49}$$

Розв'язуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь (48), (49), отримаємо

$$D(z) = \frac{1}{\Delta}(1 + \lambda_{10} s_0 + \lambda_{11} s_1), \tag{50}$$

$$E(z) = \frac{1}{\Delta} \left\{ 1 - \sum_{m=1}^{\infty} (\lambda_{10} s_m + \lambda_{11} s_{m+1}) z^m \right\}, \tag{51}$$

де

$$\Delta = 1 - \sum_{m=1}^{\infty}(\lambda_{10}s_m + \lambda_{11}s_{m+1})z^m +$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty} z^{m+1}\left\{(\lambda_{00}s_0 + \lambda_{01}s_1)(\lambda_{10}s_m + \lambda_{11}s_{m+1}) - (1 + \lambda_{10}s_0 + \lambda_{11}s_1)(\lambda_{00}s_m + \lambda_{01}s_{m+1})\right\}.$$

Легко бачити, що біортогональний поліном $\tilde{X}_N$, визначений умовами (41), (43) у випадку, коли $1+\lambda_{10}s_0+\lambda_{11}s_1 \neq 0$, буде співпадати з точністю до постійного множника з поліномом X_N, визначеним умовами (39), (40). Отож, необхідно , вважаючи відомими коефіцієнти $c_k^{(N)}$, $k = \overline{0,N}$, $N = \overline{0,\infty}$, визначити коефіцієнти $\tilde{c}_k^{(N)}$, $k = \overline{0,N}$, $N = \overline{1,\infty}$. Для цього знайдемо вирази елементів x_k, $k = \overline{0,\infty}$, через елементи $\tilde{x}_k$, $k = \overline{0,\infty}$. Позначимо

$$\tilde{X}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{x}_k z^k, \quad X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k.$$

На основі (45) отримаємо

$$\tilde{X}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=1}^{k} d_{k-m}x_m + \sum_{k=0}^{\infty} z^k e_k x_0 = X(z)D(z) + (E(z) - D(z))x_0.$$

Звідси

$$X(z) = \frac{\tilde{X}(z) + (D(z) - E(z))x_0}{D(z)}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при степенях z, маємо

$$x_k = \frac{1}{1 + \lambda_{10}s_0 + \lambda_{11}s_1}\left\{\tilde{x}_k + \sum_{j=0}^{k-1}\tilde{x}_j\left\{-\lambda_{10}s_{k-j} - \lambda_{11}s_{k-j+1} +\right.\right.$$

$$+(\lambda_{00}s_0 + \lambda_{01}s_1)(\lambda_{10}s_{k-j-1} + \lambda_{11}s_{k-j}) -$$

$$\left.\left. -(1 + \lambda_{10}s_0 + \lambda_{11}s_1)(\lambda_{00}s_{k-j-1} + \lambda_{01}s_{k-j})\right\} + (\lambda_{10}s_k + \lambda_{11}s_{k+1})\tilde{x}_0\right\},$$

звідки і випливає зображення (44).

§ 4. Теореми інваріантності для апроксимацій Паде

Незважаючи на те, що апроксиманти Паде є суттєво нелінійним апаратом наближення функцій, рядом дослідників було встановлено, що при деяких перетвореннях наближуваної функції вони зберігають свій вигляд та властивості (див. [5, с. 42–45]). На базі підходу, основаного на застосуванні узагальнених моментних зображень, можна пов'язати властивості інваріантності апроксимант Паде з властивостями інваріантності біортогональних поліномів і певним чином узагальнити існуючі результати.

Теорема 8. Нехай для деякої функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$$

існує та є невиродженою апроксиманта Паде порядку $[N-1/N]$, $N \geq 1$,

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)}.$$

Тоді для функції

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{1+\lambda z} f\left(\frac{z}{1+\lambda z}\right)$$

також існує і є невиродженою апроксиманта Паде порядку $[N-1/N]$ і при цьому

$$[N-1/N]_{\tilde{f}}(z) = \frac{\tilde{P}_{N-1}(z)}{\tilde{Q}_N(z)},$$

де

$$\tilde{Q}_N(z) = (1+\lambda z)^N Q_N\left(\frac{z}{1+\lambda z}\right), \tag{52}$$

$$\tilde{P}_{N-1}(z) = (1+\lambda z)^{N-1} P_{N-1}\left(\frac{z}{1+\lambda z}\right). \tag{53}$$

Доведення. Побудуємо для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ узагальнене моментне зображення на добутку деяких лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty},$$

де $x_k = A^k x_0$, $k = \overline{0,\infty}$, $y_j = A^{*j} y_0$, $j = \overline{0,\infty}$, так що матиме місце зображення

$$f(z) = \left\langle R_z^{\#}(A) x_0, y_0 \right\rangle.$$

Розглянемо в просторі $\mathscr{X}$ оператор

$$\tilde{A} = A - \lambda I,$$

де λ – деяке комплексне число, відмінне від 0. Порахуємо його резольвентну функцію

$$R_z^{\#}(\tilde{A}) = (I - z\tilde{A})^{-1} = (I - zA + z\lambda I)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{1+\lambda z}\left(I - \frac{z}{1+\lambda z} A\right)^{-1} = \frac{1}{1+\lambda z} R^{\#}_{\frac{z}{1+\lambda z}}(A).$$

Отож, відповідна функція матиме вигляд

$$\tilde{f}(z) = \left\langle R_z^{\#}(\tilde{A}) x_0, y_0 \right\rangle = \frac{1}{1+\lambda z} f\left(\frac{z}{1+\lambda z}\right).$$

Згідно з теоремою 1.1 апроксиманта Паде функції $f(z)$ порядку $[N-1/N]$, $N \geq 1$, може бути записана у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{k=1}^{N} c_k^{(N)} z^{N-k} \sum_{m=0}^{k-1} s_m z^m, \tag{54}$$

а коефіцієнти $c_k^{(N)}$, $k = \overline{0,N}$, визначаються зі співвідношень біортогональності для узагальненого полінома

$$X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_k \tag{55}$$

вигляду

$$\langle X_N, y_j \rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1}.$$

Позначимо

$$\tilde{x}_k = \tilde{A}^k x_0, \quad k = \overline{0,\infty}, \quad \tilde{y}_j = \tilde{A}^{*j} y_0, \quad j = \overline{0,\infty}.$$

Легко бачити, що при кожному $N \geq 1$ лінійна оболонка елементів $\{\tilde{x}_k\}_{k=0}^N$ співпадає з лінійною оболонкою елементів $\{x_k\}_{k=0}^N$, а лінійна оболонка $\{\tilde{y}_j\}_{j=0}^N$ співпадає з лінійною оболонкою елементів $\{y_j\}_{j=0}^N$. Тому, будуючи апроксиманти Паде функції $\tilde{f}(z)$ порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, ми прийдемо до побудови тих же біортогональних поліномів (55). Нам залишається лише знайти зображення цих поліномів у вигляді

$$X_N = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} \tilde{x}_k.$$

Для цього розглянемо зображення

$$x_k = A^k x_0 = (\tilde{A} + \lambda I)^k x_0 = \sum_{m=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} \lambda^{k-m} \tilde{x}_m.$$

Враховуючи (55), отримаємо

$$X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} \sum_{m=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} \lambda^{k-m} \tilde{x}_m = \sum_{m=0}^{N} \tilde{x}_m \sum_{k=m}^{N} c_k^{(N)} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} \lambda^{k-m}.$$

А тому знаменник апроксиманти Паде функції $\tilde{f}(z)$ порядку $[N-1/N]$ може бути записаний у вигляді

$$\tilde{Q}_N(z) = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} z^{N-k} = \sum_{k=0}^{N} z^{N-k} \sum_{m=k}^{N} c_m^{(N)} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} \lambda^{m-k} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N} c_m^{(N)} \sum_{k=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) z^{N-k} \lambda^{m-k} = z^N \sum_{m=0}^{N} \left(\frac{1}{z} + \lambda \right)^m =$$

$$= (1+\lambda z)^N \sum_{m=0}^{N} c_m^{(N)} \left(\frac{z}{1+\lambda z} \right)^{N-m} = (1+\lambda z)^N Q_N \left(\frac{z}{1+\lambda z} \right).$$

Аналогічно встановлюється і формула (53).

Зауваження 3. Твердження теореми 8 еквівалентне твердженню теореми Бейкера, Гаммеля та Уіллса про інваріантність діагональних апроксимант Паде при дробово-лінійних перетвореннях аргументу , наведеної в [5, с.42–43].

Теорема 9 [33]. Нехай для функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$$

існує апроксиманта Паде порядку $[N-1/N]$, $N \geq 1$,

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)}.$$

Тоді для функції

$$\tilde{f}(z) = \{((1+\lambda_{11}s_1)z - \lambda_{11}s_0)f(z) + \lambda_{11}s_0^2\}\{(((\lambda_{01}\lambda_{10} - \lambda_{00}\lambda_{11})s_1 - \lambda_{00})z^2 +$$
$$+((\lambda_{00}\lambda_{11} - \lambda_{01}\lambda_{10})s_0 - \lambda_{01} - \lambda_{10})z - \lambda_{11})f(z) +$$
$$+((1+(\lambda_{10}+\lambda_{01})s_0 + (\lambda_{01}\lambda_{10} - \lambda_{00}\lambda_{11})s_0^2 + \lambda_{11}s_1)z + \lambda_{11}s_0)\}^{-1}, \tag{56}$$

де $\lambda_{00}, \lambda_{01}, \lambda_{10}, \lambda_{11}$ – деякі константи, такі що $1+\lambda_{10}s_0+\lambda_{11}s_1 \neq 0$, також існує апроксиманта Паде порядку $[N-1/N]$ і при цьому її знаменник $\tilde{Q}_N(z)$ з точністю до постійного множника може бути зображений у вигляді

$$\tilde{Q}_N(z) = Q_N(z) \left\{ 1 + (\lambda_{01}+\lambda_{10})s_0 + \lambda_{11}s_0\frac{1}{z} + \lambda_{11}s_1 - \delta s_0^2 \right\} -$$
$$-P_{N-1}(z) \left\{ \lambda_{00}z + \delta s_1 z + \lambda_{01} + \lambda_{10} + \frac{\lambda_{11}}{z} - \delta s_0 \right\}, \tag{57}$$

де $\delta = \lambda_{00}\lambda_{11} - \lambda_{01}\lambda_{10}$.

Доведення. Побудуємо для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ узагальнене моментне зображення на добутку деяких лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty},$$

де $x_k = A^k x_0$, $k = \overline{0,\infty}$, $y_j = A^{*j} y_0$, $j = \overline{0,\infty}$, так що матиме місце зображення

$$f(z) = \left\langle R_z^{\#}(A)x_0, y_0 \right\rangle.$$

Розглянемо в просторі $\mathscr{X}$ оператор $\tilde{A}$ такий, що $\forall x \in \mathscr{X}$

$$\tilde{A}x = Ax + \langle x, \lambda_{00}y_0 + \lambda_{01}y_1\rangle\, x_0 + \langle x, \lambda_{10}y_0 + \lambda_{11}y_1\rangle\, x_1.$$

Користуючись міркуваннями, що використовувались при доведенні теореми 7, отримаємо

$$\tilde{x}_k = \tilde{A}^k x_0 = \sum_{m=1}^{k} d_{k-m}x_m + e_k x_0, \quad k = \overline{0,\infty},$$

і, отже,

$$\tilde{f}(z) = \left\langle R_z^{\#}(\tilde{A})x_0, y_0\right\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{x}_k z^k, y_0\right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{m=1}^{k} d_{k-m}x_m + \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k x_0, y_0\right\rangle =$$

$$= \left\langle D(z)\sum_{k=1}^{\infty} x_m z^k + E(z)x_0, y_0\right\rangle = D(z)\sum_{k=1}^{\infty} s_m z^k + s_0 E(z) = (f(z) - s_0)D(z) + s_0 E(z).$$

Враховуючи вирази для твірних функцій (50) , (51), отримаємо

$$\tilde{f}(z) = \frac{1 + \lambda_{10}s_0 + \lambda_{11}s_1}{\Delta} f(z) + s_0\frac{\lambda_{11}s_0 - (\lambda_{10}z + \lambda_{11})f(z)}{z\Delta} =$$

$$= \frac{(z + \lambda_{11}s_1 z - \lambda_{11}s_0)f(z) + \lambda_{11}s_0^2}{z\Delta},$$

що, як легко переконатись, співпадає з формулою (56). Щоб побудувати апроксиманту Паде цієї функції порядку $[N-1/N]$, потрібно побудувати нетривіальний узагальнений поліном

$$\tilde{X}_N = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} \tilde{x}_k,$$

що задовольняє умови біортогональності

$$\left\langle \tilde{X}_N, \tilde{y}_j\right\rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1}.$$

Згідно з твердженням теореми 7 при умові, що $1 + \lambda_{10}s_0 + \lambda_{11}s_1 \neq 0$, буде мати місце зображення

$$\tilde{X}_N = \sum_{k=0}^{n} c_k^{(N)}\tilde{x}_k - \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_m \sum_{k=m+1}^{N} c_k^{(N)} \times$$

$$\times \left\{(\lambda_{00} + \delta s_1)s_{k-m-1} + (\lambda_{01} + \lambda_{10} + \delta s_0)s_{k-m} + \lambda_{11}s_{k-m+1}\right\} +$$

$$+ x_0 \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)}(\lambda_{10}s_k + \lambda_{11}s_{k+1}),$$

а тому для знаменника $\tilde{Q}_N(z)$ апроксиманти Паде функції $\tilde{f}(z)$ порядку $[N-1/N]$ отримаємо

$$\tilde{Q}_N(z) = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} z^{N-k} = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} z^{N-k} -$$

$$-\sum_{k=1}^{N} c_k^{(N)} \sum_{m=0}^{k-1} z^{N-m} \left\{\lambda_{00} s_{k-1-m} + (\lambda_{01}+\lambda_{10}) s_{k-m} + \lambda_{11} s_{k-m+1}\right\} +$$

$$+\delta \sum_{k=1}^{N} c_k^{(N)} \sum_{m=0}^{k-1} z^{N-m} (s_0 s_{k-m} - s_1 s_{k-m-1}) + z^N \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} (\lambda_{10} s_k + \lambda_{11} s_{k+1}) =$$

$$= Q_N(z) \left\{1 + (\lambda_{01}+\lambda_{10}) s_0 + \lambda_{11} s_0 \frac{1}{z} + \lambda_{11} s_1 - \delta s_0^2\right\} -$$

$$-P_{N-1}(z) \left\{\lambda_{00} z + \delta s_1 z + \lambda_{01} + \lambda_{10} + \frac{\lambda_{11}}{z} - \delta s_0\right\} +$$

$$+z^N(-\lambda_{01} + \delta s_0) \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} s_k - z^{N-1} \lambda_{11} \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} s_k.$$

Враховуючи, що

$$\sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} s_k = \left\langle \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_k, y_0 \right\rangle = \langle X_N, y_0 \rangle = 0$$

при $N \geq 1$, отримаємо формулу (57).

Зауваження 4. З теореми 9 можна вивести, як частинний випадок, теорему про інваріантність діагональних апроксимант Паде при дробово-лінійних перетвореннях функцій, наведену в [5, с. 44].

Теорема 10. [31]. Нехай для деякої функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$$

існують її апроксиманти Паде порядків $[N+m-1/N+m]$, $m = \overline{1, M}$, і нехай

$$\Psi_M(t) = \prod_{m=1}^{M^*} (1 + \beta_m t)^{r_m} = \sum_{m=0}^{M} \alpha_m t^m$$

– деякий алгебраїчний многочлен степені M. Тоді знаменник $\tilde{Q}_N(z)$ апроксиманти Паде порядку $[N-1/N]$ функції

$$\tilde{f}(z) = \sum_{m=0}^{M} \alpha_m \frac{f(z) - \sum_{j=0}^{m-1} s_j z^j}{z^m}$$

з точністю до постійного множника може бути зображений у вигляді

$$\tilde{Q}_N(z) = \frac{1}{z^M \Psi_M(\frac{1}{z})} \det U_M(z), \tag{58}$$

де матриця $U_M(z) = \|u_{k,j}\|_{k,j=1}^{M}$ складена з елементів

$$u_{k,j} = \frac{d^p}{dw^p}\{w^j Q_{N+j}(w)\}\bigg|_{w=-\beta_m}, \tag{59}$$

при $k = \overline{1, M-1}$, $j = \overline{1, M}$, $m = \max\left\{l : \sum_{n=1}^{l-1} r_n \leq k\right\}$, $p = k - \sum_{n=1}^{m} r_n$, і

$$u_{M,j} = z^j Q_{N+j}(z),\ j = \overline{1, M},$$

де $Q_{N+j}(z)$, $j = \overline{1, M}$, – знаменники апроксимант Паде функції $f(z)$ порядків $[N + j - 1/N + j]$.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли всі β_m, $m = \overline{1, M^*}$, різні між собою, тобто $r_m = 1$, $m = \overline{1, M^*}$, $M^* = M$. Побудуємо для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ узагальнене моментне зображення на добутку деяких лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$

$$s_k = \left\langle A^k x_0, y_0 \right\rangle, \quad k = \overline{0, \infty}.$$

Після цього розглянемо елемент $\tilde{y}_0 \in \mathscr{Y}$ вигляду

$$\tilde{y}_0 = \prod_{m=1}^{M} (1 + \beta_m A^*) y_0 = \sum_{m=0}^{M} \alpha_m A^{*m} y_0.$$

Неважко переконатись в тому, що має місце зображення

$$\tilde{f}(z) = \left\langle R_z^{\#}(A) x_0, \tilde{y}_0 \right\rangle.$$

А тому знаменник апроксиманти Паде функції $\tilde{f}(z)$ порядку $[N - 1/N]$ може бути зображений у вигляді

$$\tilde{Q}_N(z) = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} z^{N-k},$$

де $\tilde{c}_k^{(N)}$, $k = \overline{0, N}$, – коефіцієнти біортогонального полінома

$$\tilde{X}_N = \sum_{k=0}^{N} \tilde{c}_k^{(N)} A^k x_0$$

такого, що

$$\left\langle \tilde{X}_N, \tilde{y}_j \right\rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1}.$$

Згідно з теоремою 5 ці коефіцієнти можуть бути підраховані за формулами

$$\tilde{c}_k^{(N)} = \sum_{m=N}^{M+N} \gamma_m \sum_{i=0}^{k} c_i^{(m)} \sum_{p_1+\ldots+p_M=k-i} (-\beta_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (-\beta_M)^{p_M},$$

де γ_m, $m = \overline{N, M+N}$, визначаються з систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k P_k \left(-\frac{1}{\beta_m}\right) = 0, \quad m = \overline{1, M}. \tag{60}$$

Отож,

$$\tilde{Q}_N(z) = \sum_{k=0}^{N} z^{N-k} \sum_{m=N}^{M+N} \gamma_m \sum_{i=0}^{k} c_i^{(m)} \sum_{p_1+\ldots+p_M=k-i} (-\beta_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (-\beta_M)^{p_M} =$$

$$= \sum_{m=N}^{M+N} \gamma_m \sum_{i=0}^{N} c_i^{(m)} \sum_{k=i}^{N} z^{N-k} \sum_{p_1+\ldots+p_M=k-i} (-\beta_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (-\beta_M)^{p_M} =$$

$$= \sum_{m=N}^{M+N} \gamma_m \sum_{i=0}^{N} c_i^{(m)} z^{N-i} \sum_{r=0}^{N-i} \sum_{p_1+\ldots+p_M=r} \left(-\frac{\beta_1}{z}\right)^{p_1} \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{\beta_M}{z}\right)^{p_M}. \tag{61}$$

З (60) робимо висновок, що для будь–яких чисел $\varkappa_k$, $k = \overline{N, M+N}$, будемо мати

$$\sum_{k=N}^{M+N} \gamma_k \varkappa_k = C \begin{vmatrix} Q_{N+M}(-\beta_1) & (-\beta_1) Q_{N+M-1}(-\beta_1) & \ldots & (-\beta_1)^M Q_N(-\beta_1) \\ \cdots & \cdots & \ldots & \cdots \\ Q_{N+M}(-\beta_M) & (-\beta_M) Q_{N+M-1}(-\beta_M) & \ldots & (-\beta_M)^M Q_N(-\beta_M) \\ \varkappa_{N+M} & \varkappa_{N+M-1} & \ldots & \varkappa_N \end{vmatrix}.$$

Тому многочлен, визначений формулами (58), (59), може бути записаним у вигляді

$$\tilde{Q}_N(z) = \frac{1}{z^M \Psi_M(\frac{1}{z})} \sum_{m=N}^{M+N} \gamma_m z^{N+M-m} Q_m(z). \tag{62}$$

Переконаємось тепер, що рівності (61) і (62) визначають один і той же многочлен. Для цього досить встановити, що різниця правих частин (61) і (62) дорівнює нулю.

$$\sum_{m=N}^{M+N} \gamma_m \sum_{i=0}^{N} c_i^{(m)} z^{N-i} \sum_{r=0}^{N-i} \sum_{p_1+\cdots+p_M=r} \left(-\frac{\beta_1}{z}\right)^{p_1} \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{\beta_M}{z}\right)^{p_M} -$$

$$- \frac{1}{z^M \Psi_M(\frac{1}{z})} \sum_{m=N}^{M+N} \gamma_m z^{N+M-m} Q_N(z) =$$

$$= \sum_{m=N}^{M+N} \gamma_m \left\{ \sum_{i=0}^{(N)} c_i^{(N)} z^{N-i} \sum_{r=0}^{N-i} \sum_{p_1+\ldots+p_M=r} \left(-\frac{\beta_1}{z}\right)^{p_1} \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{\beta_M}{z}\right)^{p_M} - \right.$$

$$-\prod_{j=1}^{M}(z+\beta_j)^{-1}z^{N+M-m}Q_m(z)\Bigg\}. \tag{63}$$

Перетворимо вираз у фігурних дужках

$$\sum_{i=0}^{N} c_i^{(m)} z^{N-i} \sum_{r=0}^{N-i} \sum_{p_1+\ldots+p_m=r} \left(-\frac{\beta_1}{z}\right)^{p_1} \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{\beta_M}{z}\right)^{p_M} - \prod_{j=1}^{M}\left(1+\frac{\beta_j}{z}\right)^{-1} z^{N-m} \sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)} z^{m-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} c_i^{(m)} z^{N-i} \sum_{r=0}^{N-i} \sum_{p_1+\ldots+p_M=r} \left(-\frac{\beta_1}{z}\right)^{p_1} \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{\beta_M}{z}\right)^{p_M} -$$

$$- \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p_1+\ldots+p_M=r} \left(-\frac{\beta_1}{z}\right)^{p_1} \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{\beta_M}{z}\right)^{p_M} \sum_{i=0}^{m} c_i^{(m)} z^{N-i} =$$

$$= -\sum_{i=0}^{N} c_i^{(m)} z^{N-i} \sum_{r=N-i+1}^{\infty} \sum_{p_1+\ldots+p_M=r} \left(-\frac{\beta_1}{z}\right)^{p_1} \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{\beta_M}{z}\right)^{p_M} -$$

$$- \sum_{i=N+1}^{m} c_i^{(m)} z^{N-i} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{p_1+\ldots+p_M=r} \left(-\frac{\beta_1}{z}\right)^{p_1} \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{\beta_M}{z}\right)^{p_m}. \tag{64}$$

З (64) випливає, що в правій частині (63) містяться лише від'ємні степені змінної z. Оскільки ж вирази (61) та (62), різницею яких є (63), є алгебраїчними многочленами степеня не вище N, то можна зробити висновок, що ця різниця дорівнює 0. Цим зображення (58) у випадку, коли всі β_m різні між собою, доведене. Поширення цього результату на випадок кратних β_m проводиться аналогічно тому, як це робилось при доведенні теореми 5.

Теорема 11. Нехай для функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$$

існують та невироджені апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$ та $[N-2/N-1]$, $N \geq 2$,

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

$$[N-2/N-1]_f(z) = \frac{P_{N-2}(z)}{Q_{N-1}(z)}.$$

І нехай в деякій точці $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\varepsilon_{N-1}(\beta) = \frac{f(\beta)Q_{N-1}(\beta) - P_{N-2}(\beta)}{\beta^{N-1}} \neq 0.$$

Тоді для функції

$$\tilde{f}(z) = \frac{zf(z) - \beta f(\beta)}{z-\beta}$$

існує та невироджена апроксиманта Паде порядку $[N-1/N]$. При цьому

$$[N-1/N]_{\tilde{f}}(z) = \frac{\tilde{P}_{N-1}(z)}{\tilde{Q}_N(z)},$$

де

$$\tilde{P}_{N-1}(z) = \frac{\varepsilon_{N-1}(\beta)}{\beta - z}\left\{\beta f(\beta) Q_N(z) - z P_{N-1}(z)\right\} -$$
$$-\frac{z\varepsilon_N(\beta)}{\beta - z}\left\{\beta f(\beta) Q_{N-1}(z) - z P_{N-2}(z)\right\},$$
$$\tilde{Q}_N(z) = \varepsilon_{N-1}(\beta) Q_N(z) - z\varepsilon_N(\beta) Q_{N-1}(z).$$

Доведення. Побудуємо для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ узагальнене моментне зображення вигляду

$$s_k = \left\langle A^k x_0, y_0 \right\rangle, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

Покладемо

$$\tilde{x}_0 = (I - \beta A)^{-1} x_0 = R_\beta^{\#}(A) x_0.$$

Підрахуємо

$$\tilde{s}_k = \left\langle A^k \tilde{x}_0, y_0 \right\rangle = \left\langle R_\beta^{\#}(A) x_0, A^{*k} y_0 \right\rangle = \left\langle R_\beta^{\#}(A) x_0, y_k \right\rangle = \frac{f(\beta) - \sum\limits_{j=0}^{k-1} s_j \beta^j}{\beta^k}.$$

Далі матимемо

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{s}_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\beta) - \sum\limits_{j=0}^{k-1} s_j \beta^j}{\beta^k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} s_j \beta^{j-k} z^k =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} s_j \sum_{k=0}^{j} \beta^{j-k} z^k = \sum_{j=0}^{\infty} s_j \frac{\beta^{j+1} - z^{j+1}}{\beta - z} = \frac{z f(z) - \beta f(\beta)}{z - \beta}.$$

З врахуванням теореми 6 біортогональний поліном $\tilde{Y}_N$, необхідний для побудови апроксиманти Паде функції $\tilde{f}(z)$ порядку $[N-1/N]$, може бути записаний у вигляді

$$\tilde{Y}_N = \varepsilon_{N-1}(\beta) Y_N - \varepsilon_N(\beta) Y_{N-1},$$

або ж

$$\sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} y_j = \sum_{j=0}^{N-1} \left\{\varepsilon_{N-1}(\beta) c_j^{(N)} - \varepsilon_N(\beta) c_j^{(N-1)}\right\} y_j + \varepsilon_{N-1}(\beta) c_N^{(N)} y_N.$$

Звідси маємо

$$\tilde{c}_j^{(N)} = \varepsilon_{N-1}(\beta) c_j^{(N)} - \varepsilon_N(\beta) c_j^{(N-1)}, \quad j = \overline{0, N-1},$$

$$\tilde{c}_N^{(N)} = \varepsilon_{N-1}(\beta) c_N^{(N)}.$$

Порахуємо тепер знаменник апроксиманти Паде функції $\tilde{f}(z)$ порядку $[N-1/N]$

$$\tilde{Q}_N(z) = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} z^{N-j} = \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \varepsilon_{N-1}(\beta) c_j^{(N)} - \varepsilon_N(\beta) c_j^{(N-1)} \right\} z^{N-j} + \varepsilon_{N-1}(\beta) c_N^{(N)} =$$

$$= \varepsilon_{N-1}(\beta) Q_N(z) - \varepsilon_N(\beta) z Q_{N-1}(z).$$

Підрахуємо чисельник

$$\tilde{P}_{N-1}(z) = \sum_{j=1}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{m=0}^{j-1} \tilde{s}_m z^m. \tag{65}$$

Спочатку обчислимо окремо

$$\sum_{m=0}^{j-1} \tilde{s}_m z^m = \sum_{m=0}^{j-1} \frac{f(\beta) - \sum\limits_{p=0}^{m-1} s_p \beta^p}{\beta^m} z^m = \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{p=m}^{\infty} s_p \beta^{p-m} z^m =$$

$$= \sum_{m=0}^{j-1} \left\{ \sum_{p=m}^{j-1} s_p \beta^{p-m} + \sum_{p=j}^{\infty} s_p \beta^{p-m} \right\} z^m = \sum_{p=0}^{j-1} s_m \beta^m \sum_{m=0}^{p} \left(\frac{z}{\beta} \right)^m + \sum_{p=j}^{\infty} s_p \beta^p \left(\frac{z}{\beta} \right)^m =$$

$$= \sum_{p=0}^{j-1} s_m \beta^m \frac{1 - (\frac{z}{\beta})^{m+1}}{1 - \frac{z}{\beta}} + \sum_{p=j}^{\infty} s_p \beta^p \frac{1 - (\frac{z}{\beta})^j}{1 - \frac{z}{\beta}} =$$

$$= \frac{1}{\beta - z} \sum_{p=0}^{j-1} s_p (\beta^{p+1} - z^{p+1}) + \frac{1}{\beta - z} \sum_{p=j}^{\infty} s_p \beta^{p-j+1} (\beta^j - z^j) =$$

$$= \frac{1}{\beta - z} \left\{ \beta f(\beta) - \beta \left(\frac{z}{\beta} \right)^j f(\beta) + \beta \left(\frac{z}{\beta} \right)^j \sum_{m=0}^{j-1} s_m \beta^m - z \sum_{m=0}^{j-1} s_m z^m \right\}. \tag{66}$$

Підставляючи (66) в (65), отримаємо

$$\tilde{P}_{N-1}(z) = \varepsilon_{N-1}(\beta) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j} \frac{1}{\beta - z} \times$$

$$\times \left\{ \beta f(\beta) - \beta \left(\frac{z}{\beta} \right)^j f(\beta) + \beta \left(\frac{z}{\beta} \right)^j \sum_{m=0}^{j-1} s_m \beta^m - z \sum_{m=0}^{j-1} s_m z^m \right\} -$$

$$-\varepsilon_N(\beta) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N-1)} z^{N-j} \frac{1}{\beta - z} \left\{ \beta f(\beta) - \beta \left(\frac{z}{\beta} \right)^j f(\beta) + \beta \left(\frac{z}{\beta} \right)^j \sum_{m=0}^{j-1} s_m \beta^m - z \sum_{m=0}^{j-1} s_m z^m \right\} =$$

$$= \frac{\varepsilon_{N-1}(\beta)}{\beta - z} \left\{ \beta f(\beta) Q_N(z) - z P_{N-1}(z) - \beta \left(\frac{z}{\beta} \right)^N \varepsilon_N(\beta) \beta^N \right\} -$$

$$-\frac{\varepsilon_N(\beta)}{\beta - z}\left\{z\beta f(\beta)Q_{N-1}(z) - z^2 P_{N-2}(z) - \beta^2\left(\frac{z}{\beta}\right)^N \varepsilon_{N-1}(\beta)\beta^{N-1}\right\} =$$

$$= \frac{\varepsilon_{N-1}(\beta)}{\beta - z}\left\{\beta f(\beta)Q_N(z) - zP_{N-1}(z)\right\} - \frac{\varepsilon_N(\beta)}{\beta - z}\left\{z\beta f(\beta)Q_{N-1}(z) - z^2 P_{N-2}\right\}.$$

РОЗДІЛ 4
ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ АПРОКСИМАЦІЙ ПАДЕ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ТА СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

§ 1. Апроксимації Паде деяких гіпергеометричних функцій

На основі узагальнених моментних зображень, побудованих в теоремі 2.1, можна встановити наступний результат.

Теорема 1. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \tag{1}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} (k+N)! z^{N-k}, \tag{2}$$

$$P_{N-1}(z) = 2(-1)^N \sum_{m=0}^{[(N-1)/2]} \binom{N}{2m+1} (2N-2m-1)! z^{2m}. \tag{3}$$

Доведення. Для послідовності коефіцієнтів степеневого розкладу функції (1) нами побудоване узагальнене моментне зображення (2.5) на добутку просторів $L[0,1] \times C[0,1]$. Згідно з теоремою 1.1 це надає нам можливість будувати елементи першої піддіагоналі таблиці Паде для функції (1) в термінах біортогональних поліномів

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} \frac{t^k}{k!}, \tag{4}$$

що мають властивості

$$\int_0^1 X_N(t) \frac{(1-t)^j}{j!} dt = 0, \; j = \overline{0, N-1}.$$

Враховуючи той факт, що біортогоналізовувати потрібно послідовності функцій, що є алгебраїчними многочленами степенів k та j відповідно, бачимо, що шуканий біортогональний поліном з точністю до постійного множника співпадає зі зсуненим ортонормованим на $[0,1]$ многочленом Лежандра $L_N^*(t)$ (див.[98, с.580]). Користуючись формулою Родріга (див. [100, с.54]), отримаємо зображення

$$L_N^*(t) = \gamma_N \frac{d^N}{dt^N}\{t^N(1-t)^N\} = \gamma_N \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (-1)^k (k+N)(k+N-1) \cdot \ldots \cdot (k+1) t^k =$$

$$= \gamma_N \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \frac{(k+N)!}{k!} t^k.$$

Враховуючи (4), маємо

$$c_k^{(N)} = (-1)^k \binom{N}{k} (k+N)!.$$

Отож, знаменник апроксиманти Паде функції (1) порядку $[N-1/N]$ може бути записаним у вигляді (2). Переконаємося тепер в справедливості формули для чисельника. Ми маємо

$$P_{N-1}(z) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} (k+N)! z^{N-k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{z^j}{(j+1)!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} z^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^{N-k} \binom{N}{k} \frac{(2N-k)!}{(m-k+1)!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} z^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^{N-k} \binom{m+1}{k} \frac{N!(2N-k)!}{(N-k)!(m+1)!}.$$

Позначимо

$$p_m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{N-k} \binom{m+1}{k} \frac{N!(2N-k)!}{(N-k)!(m+1)!},$$

$$\alpha_k = \begin{cases} \binom{2N-k}{N}, & k = \overline{0, N}, \\ 0, & \text{в протилежному випадку} . \end{cases}$$

Розглянемо твірну функцію

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k z^k}{k!}.$$

Підрахуємо

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \alpha_k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \alpha_k \sum_{m=k}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \binom{m}{k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha_k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{m+k}}{(m+k)!} \frac{(m+k)!}{m!} = A(-z) e^z.$$

З іншого боку,

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N} \binom{2N-k}{N} \frac{z^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{(2N-k)!}{N!(N-k)!} \frac{z^k}{k!} = \frac{1}{(N!)^2} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (2N-k)! z^k =$$

$$= \frac{1}{(N!)^2} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{2N-k} du z^k = \frac{1}{(N!)^2} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{2N} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{z}{u}^k du =$$

$$= \frac{1}{(N!)^2} \int\limits_0^\infty e^{-u} u^{2N} \left(1 + \frac{z}{u}\right)^N du = \frac{1}{(N!)^2} \int\limits_0^\infty e^{-u} u^N (z+u)^N du.$$

Виконаємо заміну $z + u = t$. Отримаємо

$$A(z) = \frac{1}{(N!)^2} \int\limits_z^\infty e^{-t+z} (t-z)^N t^N dt = \frac{e^z}{(N!)^2} \int\limits_z^\infty e^{-t} (t-z)^N t^N dt =$$

$$= \frac{e^z}{(N!)^2} \left\{ \int\limits_0^\infty e^{-t} (t-z)^N t^N dt - \int\limits_0^z e^{-t} (t-z)^N t^N dt \right\} =$$

$$= e^z \left\{ A(-z) - \frac{1}{(N!)^2} \int\limits_0^z e^{-t} (t-z)^N t^N dt \right\}.$$

Таким чином,

$$\sum_{m=0}^\infty \frac{z^m}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \alpha_k = A(z) - \frac{1}{(N!)^2} \int\limits_0^{-z} e^{-t} (t+z)^N t^N dt.$$

Очевидно, що

$$\frac{1}{(N!)^2} \int\limits_0^{-z} e^{-t} (t+z)^N t^N dt = O\left(z^{N+1}\right)$$

при $z \to \infty$. Отже,

$$\frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \alpha_k = \frac{\alpha_m}{m!}$$

при $m = \overline{0, N}$, тобто

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \binom{2N-k}{N} = \binom{2N-m}{N}$$

при $m = \overline{0, N}$, або ж

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{2N-k}{N} = \binom{2N-m}{N} (1 - (-1)^m),$$

і, отже,

$$p_m = \sum_{k=0}^m (-1)^{N-k} \binom{m+1}{k} \frac{N!(2N-k)!}{(N-k)!(m+1)!} =$$

$$= (-1)^N \frac{(N!)^2}{(m+1)!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m+1}{k} \binom{2N-k}{N} =$$

$$= (-1)^N \frac{(N!)^2}{(m+1)!}\binom{2N-m-1}{N}(1-(-1)^{m+1}) = \frac{(-1)^N N!(2N-m-1)!}{(N-m-1)!(m+1)!}(1-(-1)^{m+1}) =$$

$$= (-1)^N \binom{N}{m+1}(2N-m-1)!(1-(-1)^{m+1}),$$

звідки і випливає формула (3).

Апроксиманти Паде експоненти були побудовані ще Ш. Ермітом [173] і надалі вивчалися цілим рядом дослідників [91,218-221,231]. В.К. Дзядиком та Л.І. Філозофом [55] для побудови цих апроксимант було використано апроксимаційний метод наближеного розв'язування диференціальних рівнянь, який став однією з відправних точок створення методу узагальнених моментних зображень.

Аналогічно, користуючись теоремою 2.2, можна встановити наступний результат.

Теорема 2. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{{}_1F_1(1;\nu+1;z)-1}{z},\ \nu > -1, \tag{5}$$

порядків $[N-1/N]$, $n \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\binom{N}{k}(\nu+1)_{N+k}z^{N-k}, \tag{6}$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{k=0}^{N-1}(-1)^k z^k \sum_{m=0}^{k}\binom{N}{m}\frac{(\nu+1)_{2N-m}}{(\nu+1)_{k-m+1}}. \tag{7}$$

Доведення. Розглянемо побудоване в §1 розділу 2 узагальнене моментне зображення

$$s_{k+j} = \int_0^1 \frac{t^{k+\nu}}{(\nu+1)_k}\cdot\frac{(1-t)^j}{j!}dt,\ k,j=\overline{0,\infty},$$

для послідовності $s_k = \frac{1}{(\nu+1)_{k+1}}$, $k=\overline{0,\infty}$, коефіцієнтів степеневого розкладу функції (5). Щоб побудувати першу піддіагональ таблиці Паде цієї функції, необхідно побудувати біортогональні поліноми вигляду

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)}\frac{t^{k+\nu}}{(\nu+1)_k},$$

що мають властивості

$$\int_0^1 X_N(t)\frac{(1-t)^j}{j!}dt = 0,\ j=\overline{0,N-1}.$$

Легко переконатися, що шукані біортогональні поліноми можуть бути зображені у вигляді

$$X_N(t) = \gamma_N t^\nu R_N^{(\nu,0)*}(t),$$

де $R_N^{(\nu,0)*}(t)$ - зсунені ортонормовані на $[0,1]$ з вагою $t^\nu dt$ многочлени Якобі (див. [98, с.580]). Користуючись формулою Родріга, отримаємо зображення

$$X_N(t) = \gamma_N \frac{d^N}{dt^N}\{t^{N+\nu}(1-t)^N\} =$$

$$= \gamma_N \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (-1)^k (k+N+\nu)(k+N+\nu-1)\cdot \ldots \cdot (k+\nu+1) t^{k+\nu} =$$

$$= \gamma_N \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \frac{(\nu+1)_{N+k}}{(\nu+1)_k} t^{k+\nu}.$$

Враховуючи (6), маємо

$$c_k^{(N)} = (-1)^k \binom{N}{k} (\nu+1)_{N+k}.$$

Отож, знаменник та чисельник апроксиманти Паде функції (5) порядку $[N-1/N]$ можуть бути записані у вигляді (6), (7).

Апроксиманти Паде виродженої гіпергеометричної функції ${}_1F_1(1;\nu+1;z)$ були побудовані Г.ван Россумом [214] і досліджувалися, зокрема в роботах [76,129-131,200]. Побудова цих апроксимант з використанням узагальнених моментних зображень здійснена в [17].

Теорема 3 [20]. Нехай функція $\varphi_0(t) \in C[0,1]$ є такою, що для будь-якого алгебраїчного многочлена $p(t)$, $\deg p(t) \le N$, узагальнений поліном

$$A_N(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t p(t-\tau)\varphi_0(\tau) d\tau$$

має не більше, ніж N, коренів на $(0,1)$. Тоді для аналітичної функції $f(z)$, що визначається зображенням

$$f(z) = \int_0^1 \varphi_0(t) e^{z(1-t)} dt, \tag{9}$$

її апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$, $N \ge 1$, існують і збігаються до $f(z)$ рівномірно на кожному компакті комплексної площини.

Доведення. Розглянемо в просторі $C[0,1]$ лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau.$$

Враховуючи теорему 2.1, неважко впевнитись, що для функції $f(z)$, визначеної формулою (9), має місце зображення

$$f(z) = \int_0^1 (R_z^{\#}(A)\varphi_0)(t)dt.$$

З умов, накладених на функцію $\varphi_0(t)$, випливає, що система функцій $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^N = \{(A^k\varphi_0)(t)\}_{k=0}^N$ є чебишовською на $(0,1)$ при кожному $N = \overline{0,\infty}$. Це дозволяє нам скористатися теоремою 3.3. Згідно з нею поліном

$$Y_N(t) = \sum_{j=0}^N c_j^{(N)} \frac{(1-t)^j}{j!},$$

що володіє властивостями біортогональності

$$\int_0^1 \varphi_k(t) Y_N(t)dt = 0,\ k = \overline{0, N-1},$$

існує і всі його N нулів розташовані на інтервалі $(0,1)$. Те ж саме можна сказати і про поліноми

$$\tilde{Y}_N(t) = Y_N(1-t) = \sum_{j=0}^N c_j^{(N)} \frac{t^j}{j!}.$$

Розглянемо тепер алгебраїчний многочлен

$$F_N(t) = \sum_{j=0}^N \frac{N!}{(N-j)!} z^j.$$

Очевидно,

$$e^t - \frac{t^N F_N(1/t)}{N!} = e^t - \sum_{k=0}^N \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}.$$

Для будь-якого компакту $K \subset \mathbb{C}$ і $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\forall N \geq N_0$

$$\left\| e^t - \frac{t^N F_N(1/t)}{N!} \right\|_{C(K)} < \varepsilon.$$

Вибираючи $\varepsilon < \exp\{\min\limits_{t \in K} \Re t\}$, бачимо, що згідно з теоремою Руше [68, с.425] $\forall N \geq N_0$ многочлен

$$\frac{t^N F_N(1/t)}{N!}$$

не матиме жодного нуля на компакті K, а отже, поліном $F_N(t)$ не матиме нулів на множині $K^{-1} = \{z = t^{-1} :\ t \in K\}$. Для простоти будемо вважати $K = K_R = \{t :\ |t| \leq R\}$, тоді

$K^{-1} = \{z: \ |z| \geq 1/R\}$. В цьому разі всі N нулів многочлена $F_N(t)$ будуть розташовані всередині круга $K_{1/R}$. Г. Сеге встановив наступний результат (див.[79, с.75]).

Теорема 4. Нехай всі нулі алгебраїчного многочлена

$$F_N(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k \binom{N}{k} z^k$$

лежать в круговій області K, а нулі алгебраїчного многочлена

$$G_N(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k \binom{N}{k} z^k$$

дорівнюють $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$. Тоді кожен нуль γ многочлена $H_N(z)$, що є композицією многочленів $F_N(z)$ та $G_N(z)$

$$H_N(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k b_k \binom{N}{k} z^k$$

має вигляд

$$\gamma = -\beta_\nu \varkappa,$$

де ν - належним чином вибраний індекс ($\nu = \overline{1, N}$), а $\varkappa$ - належним чином обрана точка з K.

Враховуючи, що всі нулі $F_N(t)$ лежать в $K_{1/R}$, а всі нулі $\tilde{Y}_N(t)$ розташовані на $(0,1)$, на основі теореми 4 робимо висновок, що всі нулі многочлена

$$H_N(t) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} \frac{1}{j!} \frac{N!}{(N-j)!} \frac{j!(N-j)!}{N!} t^j = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} t^j$$

лежать в крузі $K_{1/R}$. Але згідно з (1.17) знаменник $Q_N(Z)$ апроксиманти Паде функції $f(z)$ порядку $[N-1/N]$ має вигляд

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j} = z^N H_N(1/z).$$

А тому всі корені знаменника $Q_N(z)$ лежать поза кругом K_R. Отож, для кожного компакта $K \subset \mathbb{C}$, починаючи з деякого номера $N_0 \in \mathbb{N}$, всі знаменники апроксимант Паде функції f порядків $[N-1/N]$, $n \geq N_0$, не матимуть коренів на K. Візьмемо тепер довільне $R > 0$ і виберемо N_0 таким чином, щоб $\forall N \geq N_0$ нулі знаменників апроксимант Паде функції f порядків $[N-1/N]$, $N \geq N_0$, лежали поза кругом K_{2R}. Розглянемо похибку апроксимації в крузі K_R. Згідно з (1.21) вона матиме зображення

$$f(z) - [N-1/N]_f(z) = \frac{z^{2N}}{Q_N(z)} \int_0^1 (R_z^{\#}(A)\varphi_N)(t) Y_N(t) dt.$$

Враховуючи формулу для резольвентної функції (2.2), маємо

$$(R_z^{\#}(A)\varphi_N)(t) = \int\limits_0^t \frac{(t-\tau)^{N-1}}{(N-1)!} \left\{ \varphi_0(\tau) + z \int\limits_0^\tau \varphi_0(u) e^{z(\tau-u)} du \right\} d\tau.$$

Оскільки $Y_N(t)$ має всі корені на $(0,1)$, то його можна записати у вигляді

$$Y_N(t) = c_N^{(N)} \prod_{j=1}^{N} (t - t_j),$$

де $t_j \in (0,1)$, $j = \overline{0,N}$. Оскільки $Q_N(z)$ має всі корені поза K_{2R}, то його можна зобразити у вигляді

$$Q_N(z) = c_N^{(N)} \prod_{j=1}^{N} \left(1 - \frac{z}{z_j}\right),$$

де $|z_j| > 2R$, $j = \overline{1,N}$. Отримаємо оцінку

$$|f(z) - [N-1/N]_f(z)| \leq \frac{|z|^N}{|c_N^{(N)}| \prod\limits_{j=1}^{N} |1 - \frac{z}{z_j}|} |c_N^{(N)}| |z|^N \frac{1}{(N+1)!} \left(M + |z| M e^{|\Re z|}\right),$$

де $M = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\varphi_0(t)|$. Далі, очевидно, матимемо

$$\|f(z) - [N-1/N]_f(z)\|_{C(K_R)} \leq \frac{(2R^2)^N}{(N+1)!} M \left(1 + Re^R\right),$$

звідки і випливає твердження теореми.

Зауваження 1. З теореми 3, зокрема, випливає збіжність апроксимант Паде порядків $[N-1/N]$ функцій (1) та (5).

В §1 розділу 2 ми побудували для послідовності коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z) = \frac{1}{\nu+1}{}_2F_1(\varkappa+\nu+1, 1; \nu+2; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varkappa+\nu)_k}{(\nu+1)_{k+1}} \tag{11}$$

узагальнене моментне зображення

$$s_{k+j} = \frac{(\varkappa+\nu)_{k+j}}{(\nu+1)_{k+j+1}} = \int\limits_0^1 \frac{(\varkappa+\nu+1)_k}{(\nu+1)_k} t^{k+\nu} \cdot \sum_{m=0}^{j} \frac{(-\varkappa+1)_m (\varkappa)_{j-m}}{m!(j-m)!} t^m dt, \; k, j = \overline{0,\infty}.$$

Користуючись цим зображенням, ми можемо побудувати апроксиманти Паде функції (11) порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$.

Теорема 5. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{1}{\nu+1} {}_2F_1(\varkappa+\nu+1, 1; \nu+2; z),$$

$\nu > -1$, порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \frac{(\nu+1)_{N+k}}{(\varkappa+\nu+1)_k} z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = (\varkappa+\nu) \sum_{j=0}^{N-1} z^j \sum_{m=0}^{j} (-1)^{N-m} \binom{N}{m} \frac{(\nu+1)_{2N-m}}{(\varkappa+\nu+j-m)_{N-j+1}}.$$

Доведення. Розглянемо біортогональні поліноми вигляду

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} \frac{(\varkappa+\nu+1)_k}{(\nu+1)_k} t^{k+\nu},$$

що мають властивості

$$\int_0^1 X_N(t) \sum_{m=0}^{j} \frac{(-\varkappa+1)_m (\varkappa)_{j-m}}{m!(j-m)!} t^m dt = 0, \ j = \overline{0, N-1}.$$

Очевидно, поліноми $X_N(t)$ з точністю до постійних множників будуть співпадати з поліномами (9). Отож, коефіцієнти знаменників поліномів Паде функції (11) можуть бути записані у вигляді

$$c_k^{(N)} = (-1)^k \binom{N}{k} \frac{(\nu+1)_{N+k}}{(\varkappa+\nu+1)_k}.$$

А значить, знаменники та чисельники апроксимант Паде функції (11) порядків $[N-1/N]$ матимуть зображення

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \frac{(\nu+1)_{N+k}}{(\varkappa+\nu+1)_k} z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} \frac{(\nu+1)_{N+k}}{(\varkappa+\nu+1)_k} z^{N-k} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\varkappa+\nu)_j}{(\nu+1)_{j+1}} z^j =$$

$$= (\varkappa+\nu) \sum_{j=0}^{N-1} z^j \sum_{m=0}^{j} (-1)^{N-m} \binom{N}{m} \frac{(\nu+1)_{2N-m}}{(\varkappa+\nu+j-m)_{N-j+1}}.$$

Апроксиманти Паде функції (11) були побудовані А. Паде [213]. Асимптотична поведінка похибки апроксимації була досліджена Ю. Люком [66,199]. Відповідні результати з використанням узагальнених моментних зображень були отримані в [17,23].

§ 2. Апроксимації Паде функцій типу Міттаг-Леффлера

В §1 розділу 2 нами також було побудоване узагальнене моментне зображення

$$s_{k+j} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k+j}{\rho} + \nu_1 + \nu_2 + 2\right)} =$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{k/\rho+\nu_1}}{\Gamma(k/\rho + \nu_1 + 1)} \cdot \frac{(1-t)^{j/\rho+\nu_2}}{\Gamma(j/\rho + \nu_2 + 1)} dt,\ k, j = \overline{0, \infty}, \tag{12}$$

для послідовності коефіцієнтів степеневого розкладу функції типу Міттаг-Леффлера

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = E_\rho(z; \nu_1 + \nu_2 + 2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k/\rho + \nu_1 + \nu_2 + 2)}$$

при $\nu_1, \nu_2 > -1$.

Теорема 6 [18,20]. Апроксиманти Паде функції $f(z) = E_\rho(z; \nu)$, $\nu > 0$, $0 < \rho \le 1$, порядків $[N-1/N]$, $N \ge 1$, збігаються до $f(z)$ рівномірно на кожному компакті комплексної площини.

Доведення. Виберемо $\nu_1, \nu_2 > -1$ так, щоб $\nu = \nu_1 + \nu_2 + 2 > 0$. Скористаємося тепер узагальненим моментним зображенням (12). Оскільки системи функцій

$$\left\{ \frac{t^{k/\rho+\nu_1}}{\Gamma(k/\rho + \nu_1 + 1)} \right\}_{k=0}^{\infty} \text{та} \left\{ \frac{(1-t)^{j/\rho+\nu_2}}{\Gamma(j/\rho + \nu_2 + 1)} \right\}_{j=0}^{\infty}$$

є чебишовськими на $(0, 1)$, то згідно з теоремою 3.3 узагальнений поліном

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} \frac{t^{k/\rho+\nu_1}}{\Gamma(k/\rho + \nu_1 + 1)},$$

що визначається умовами біортогональності

$$\int_0^1 X_N(t) \frac{(1-t)^{j/\rho+\nu_2}}{\Gamma(j/\rho + \nu_2 + 1)} dt = 0,\ j = \overline{0, N-1},$$

існує і всі його N нулів розташовані на інтервалі $(0, 1)$. Те ж саме можна сказати і про алгебраїчний многочлен

$$\tilde{X}_N(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} \frac{t^k}{\Gamma(k/\rho + \nu_1 + 1)}.$$

Враховуючи теорему 4, робимо висновок, що для того, щоб в кожному крузі $K_R = \{z : |z| \le R\}$ були відсутніми нулі знаменників $Q_N(z)$ апроксимант Паде функції $f(z)$ порядків $[N-1/N]$, починаючи з деякого $N_0 \in \mathbb{N}$, достатньо, щоб в цьому крузі не було нулів многочленів

$$\tilde{Q}_N(z) = \sum_{k=0}^{N} z^{N-k}\frac{\Gamma(k/\rho+\nu_1+1)N!}{k!(N-k)!}(-1)^k =$$

$$= (-1)^N\Gamma(N/\rho+\nu_1+1)\left\{1+\sum_{k=1}^{N}(-z)^k\frac{\Gamma(\frac{N-k}{\rho}+\nu_1+1)}{\Gamma(\frac{N}{\rho}+\nu_1+1)}\frac{N!}{k!(N-k)!}\right\}. \qquad (13)$$

Оцінимо останню суму, користуючись формулою Стірлінга (див. [107, с.117]):

$$\left|\sum_{k=1}^{N}(-z)^k\frac{\Gamma(\frac{N-k}{\rho}+\nu_1+1)}{\Gamma(\frac{N}{\rho}+\nu_1+1)}\frac{N!}{k!(N-k)!}\right| \le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{N}|-z|^k e^{k\frac{1-\rho}{\rho}}\frac{(N+1)^{-N\frac{1-\rho}{\rho}-\nu_1}}{(N-k+1)^{-(N-k)\frac{1-\rho}{\rho}-\nu_1}}\frac{\rho^{\frac{k}{\rho}}}{k!} \le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{N}R^k e^{k\frac{1-\rho}{\rho}}\frac{\rho^{\frac{k}{\rho}}}{k!}\frac{(1-\frac{k}{N+1})^{N\frac{1-\rho}{\rho}-\nu_1}}{(N-k+1)^{k\frac{1-\rho}{\rho}}} \le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{[N/2]}\frac{\sigma^k}{k!}\frac{1}{(N/2+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}} + C\sum_{[N/2]+1}^{\infty}\frac{\sigma^k}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N\frac{1-\rho}{\rho}} \le$$

$$\le \frac{C_1}{(N+1)^{\frac{1-\rho}{\rho}}} + \frac{C_2}{2^{N\frac{1-\rho}{\rho}}} \to 0 \qquad (14)$$

при $N \to \infty$. З зображення (13) і оцінки (14) випливає, що, починаючи з деякого $N_0 \in \mathbb{N}$, в крузі K_R не буде жодного нуля многочлена $\tilde{Q}_N(z)$, а отже, і знаменника $Q_N(z)$ апроксиманти Паде функції $f(z)$ порядку $[N-1/N]$. Запишемо тепер формулу для похибки апроксимації

$$f(z) - [N-1/N]_f(z) = \frac{z^N}{Q_N(z)}\int_0^1 X_N(t)\sum_{j=N}^{\infty} z^j\frac{(1-t)^{j/\rho+\nu_2}}{\Gamma(j/\rho+\nu_2+1)}dt. \qquad (15)$$

Діючи аналогічно тому, як це робилося при доведенні теореми 3, виберемо N_0 так, щоб $\forall N \ge N_0$ всі нулі знаменників $Q_N(z)$ лежали поза кругом K_{2R}, і оцінимо похибку (15) для $z \in K_R$

$$|f(z) - [N-1/N]_f(z)| \le$$

$$\le \frac{|z|^{2N}}{|c_N^{(N)}|\prod_{j=1}^{N}|1-\frac{z}{z_j}|}|c_N^{(N)}|\frac{1}{\Gamma(\frac{N}{\rho}+\nu_2+1)}\sum_{j=0}^{\infty}|z|^j\frac{\Gamma(\frac{N}{\rho}+\nu_2+1)}{\Gamma(\frac{N+j}{\rho}+\nu_2+2)} \le$$

$$\leq \frac{(2R^2)^N}{\Gamma(\frac{N}{\rho}+\nu_2+1)}\sum_{j=0}^{\infty}|z|^j\frac{1}{\Gamma(\frac{j}{\rho}+1)}\int\limits_0^1 t^{\frac{j}{\rho}}(1-t)^{\frac{N}{\rho}+\nu_2}dt \leq\leq \frac{(2R^2)^N}{\Gamma(\frac{N}{\rho}+\nu_2+2)}E_\rho(|z|;1),$$

звідки і випливає твердження теореми.

Зауваження 2. Збіжність рядків таблиці Паде для функції Міттаг-Леффлера доведена в [194].

§ 3. Апроксимації Паде деяких базисних гіпергеометричних рядів

В §2 розділу 2 ми побудували узагальнене моментне зображення

$$s_{k+j} = \frac{1}{(k+j+1)_q!} = \int\limits_0^1 \frac{t^{(k+1)_q-1}}{k_q}\cdot\sum_{m=0}^{j}(-1)^m\frac{q^{m(m-1)/2}}{m_q!(j-m)_q!}t^{m_q q^{-m}}dt,\ k,j=\overline{0,\infty},$$

для послідовності коефіцієнтів степеневого розкладу функції

$$f(z) = \frac{E_q(z)-1}{z}, \tag{16}$$

де $E_q(z)$ - q-аналог експоненти. Щоб побудувати апроксиманти Паде функції $f(z)$ порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, нам необхідно біортогоналізувати функціональні послідовності $\left\{t^{(k+1)_q-1}\right\}_{k=0}^{\infty}$ та $\left\{t^{j_q q^{-j}}\right\}_{j=0}^{\infty}$. Має місце наступний результат, який можна трактувати як узагальнення формули Родріга для ортогональних многочленів Лежандра.

Теорема 7 [25]. Нетривіальний узагальнений поліном

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} d_k^{(N)} t^{(k+1)_q-1},$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\int\limits_0^1 X_N(t)t^{j_q q^{-j}}dt = 0,\ j=\overline{0,N-1},$$

з точністю до мультиплікативної константи можна записати у вигляді

$$X_N(t) = (D^N U_{2N})(t),$$

де оператор D визначається формулою

$$(D\varphi)(t) = \frac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}\varphi'\left(t^{\frac{1}{q}}\right), \tag{17}$$

а узагальнений поліном $U_{2N}(t)$ має зображення

$$U_{2N}(t) = \sum_{m=0}^{N}(-1)^m\frac{q^{\frac{m(m+1)}{2}-Nm}N_q!}{m_q!(N-m)_q!}t^{(N+m+1)_q-1}.$$

Доведення. Неважко переконатися, що для $k=\overline{1,N}$ має місце зображення

$$(D^kU_{2N})(t)=\sum_{m=0}^{N}(-1)^m\frac{q^{\frac{m(m+1)}{2}-Nm}N_q!}{m_q!(N-m)_q!}\frac{(N+m)_q!}{(N+m-k)_q!}t^{(N+m+1-k)_q-1}. \tag{18}$$

Очевидно, що $(D^kU_{2N})(0)=0$ для $k=\overline{0,N-1}$. Переконаємось, що також $(D^kU_{2N})(1)=0$ для $k=\overline{0,N-1}$. Візьмемо до уваги наступну тотожність для многочленів Гаусса, що є q-аналогом тотожності Чу-Вандермонда (див. [111, с.51]):

$$\begin{bmatrix}N+m\\k\end{bmatrix}=\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N\\k-j\end{bmatrix}q^{(m-j)(k-j)}.$$

З неї випливає, що

$$\frac{(N+m)_q!}{(N+m-k)_q!}=k_q!\begin{bmatrix}N+m\\k\end{bmatrix}=k_q!\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N\\k-j\end{bmatrix}q^{(m-j)(k-j)}.$$

Підставимо цей вираз в (18) і покладемо $t=1$. Отримаємо

$$(D^kU_{2N})(1)=\sum_{m=0}^{N}(-1)^m\frac{q^{\frac{m(m+1)}{2}-Nm}N_q!}{m_q!(N-m)_q!}k_q!\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}m\\j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N\\k-j\end{bmatrix}q^{(m-j)(k-j)}=$$

$$=k_q!\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}N\\k-j\end{bmatrix}\sum_{m=j}^{N}(-1)^m\frac{q^{\frac{m(m+1)}{2}-Nm+(m-j)(k-j)}N_q!m_q!}{m_q!(N-m)_q!j_q!(m-j)_q!}=$$

$$=k_q!\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}N\\k-j\end{bmatrix}\frac{N_q!}{j_q!(N-j)_q!}\sum_{m=j}^{N}(-1)^m\begin{bmatrix}N-j\\m-j\end{bmatrix}q^{\frac{m(m+1)}{2}-Nm+(m-j)(k-j)}=$$

$$=k_q!\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}N\\k-j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N\\j\end{bmatrix}\sum_{m=0}^{N-j}(-1)^{m+j}\begin{bmatrix}N-j\\m\end{bmatrix}q^{\frac{(m+j)(m+j+1)}{2}-N(m+j)+m(k-j)}=$$

$$=k_q!\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}N\\k-j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N\\j\end{bmatrix}(-1)^j\sum_{m=0}^{N-j}(-1)^m\begin{bmatrix}N-j\\m\end{bmatrix}q^{\frac{m(m+1)}{2}-(N-j)m}q^{\frac{j(j+1)}{2}-Nj+m(k-j)}.$$

В тотожності (2.20) замінимо q на $\frac{1}{q}$. Будемо мати

$$\sum_{m=0}^{k}\begin{bmatrix}k\\m\end{bmatrix}(-1)^m z^m q^{\frac{m(m+1)}{2}-km}=\prod_{m=0}^{k-1}(1-zq^{-m}). \tag{19}$$

З врахуванням (19) отримаємо

$$(D^kU_{2N})(1)=k_q!\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix}N\\k-j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N\\j\end{bmatrix}(-1)^jq^{\frac{j(j+1)}{2}-Nj}\prod_{m=0}^{N-j-1}(1-q^{k-j}\cdot q^{-m})=0,\ k=\overline{0,N-1},$$

оскільки в останньому добутку при вказаних значеннях k обов'язково буде присутнім нульовий співмножник.

Розглянемо тепер для оператора A, означеного формулою (2.1), та функцій $y_j(t)$, означених формулами (2.21), інтеграл

$$\int_0^1 (D^N U_{2N})(t) y_j(t) dt = \int_0^1 (A^j D^N U_{2N})(t) dt.$$

Легко переконатись, що

$$(AD\varphi)(t) = \varphi(t) - \varphi(0).$$

Отож, враховуючи, що $(D^k U_{2N})(0) = 0$ для $k = \overline{0, N-1}$,

$$\int_0^1 (D^N U_{2N})(t) y_j(t) dt = \int_0^1 (A^{j-1} D^{N-1} U_{2N})(t) y_j(t) dt = \ldots =$$

$$= \int_0^1 (D^{N-j} U_{2N})(t) dt = (D^{N-j-1} U_{2N})(1) - (D^{N-j-1} U_{2N})(0) = 0.$$

при $j = \overline{0, N-1}$. Таким чином, узагальнений поліном $X_N(t) = (D^N U_{2N})(t)$ є ортогональним до системи функцій $\{y_j(t)\}_{j=0}^{N-1}$, або, що те ж саме, до системи функцій $\left\{t^{j_q q^{-j}}\right\}_{j=0}^{N-1}$.

Використовуючи теорему 7, ми можемо легко отримати явний вигляд апроксимант Паде функції (1) порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$.

Теорема 8 [25]. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{E_q(z) - 1}{z}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{m=0}^{N} z^{N-m} (-1)^m \frac{q^{\frac{m(m+1)}{2} - Nm} N_q! (N+m)_q!}{m_q! (N-m)_q!},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{j=0}^{N-1} z^j \sum_{m=0}^{j} (-1)^{N-m} \frac{q^{\frac{m(m-1)}{2} - \frac{N(N-1)}{2}} N_q! (2N-m)_q!}{m_q! (N-m)_q! (j-m+1)_q!}.$$

Зауваження 3. Діагональні поліноми Паде функції $E_q(z)$ були раніше іншим способом побудовані в [229]. Див. також [127,151,152,180].

Для побудови апроксимант Паде функції, коефіцієнти степеневого ряду якої визначаються формулами (2.29), треба біортогоналізувати системи функцій $\left\{t^{(k+1)_q-1+\nu q^k}\right\}_{k=0}^{\infty}$ та $\left\{t^{j_q q^{-j}}\right\}_{j=0}^{\infty}$.

Теорема 9 [25]. Нетривіальний узагальнений поліном

$$X_N(t)=\sum_{k=0}^{N} d_k^{(N)} t^{(k+1)_q-1+\nu q^k},$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\int_0^1 X_N(t) t^{j_q q^{-j}} dt=0,\ j=\overline{0,N-1},$$

з точністю до мультиплікативної константи можна записати у вигляді

$$X_N(t)=(D^N U_{2N})(t),$$

де оператор D визначається формулою (17), а узагальнений поліном $U_{2N}(t)$ має зображення

$$U_{2N}(t)=\sum_{m=0}^{N}(-1)^m \frac{q^{\frac{m(m+1)}{2}-Nm} N_q!}{m_q!(N-m)_q!} t^{(N+m+1)_q-1+\nu q^{N+m}}.$$

Доведення. Аналогічно тому, як це робилося при доведенні теореми 7, встановимо, що

$$(D^k U_{2N})(t)=\sum_{m=0}^{N}(-1)^m \frac{q^{\frac{m(m+1)}{2}-Nm} N_q!}{m_q!(N-m)_q!} \prod_{j=0}^{k-1}\{(N+m-j)_q+\nu q^{N+m-j-1}\} t^{(N+m+1-k)_q-1+\nu q^{N+m-k}}.$$

Знову ж таки легко бачити, що $(D^k U_{2N})(0)=0$ для $k=\overline{0,N-1}$. Щоб переконатися, що також $(D^k U_{2N})(1)=0$ для $k=\overline{0,N-1}$, використаємо наступний допоміжний результат.

Лема 1 [25]. Має місце тотожність

$$\prod_{j=0}^{k-1}\{(N+m-j)_q+\nu q^{N+m-j-1}\}=k_q!\sum_{j=0}^{k}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} q^{(m-j)(k-j)} \frac{\prod_{p=0}^{k-j-1}\{(N-p)_q+\nu q^{N-p-1}\}}{(k-j)_q!}.$$

Подальше доведення теореми 9 проводиться за схемою доведення теореми 7.

Теорема 10 [25]. Апроксиманти Паде функції

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\prod_{m=1}^{k+1}(m_q+\nu q^{m-1})}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{m=0}^{N} z^{N-m}(-1)^m \frac{q^{\frac{m(m+1)}{2}-Nm} N_q!}{m_q!(N-m)_q!} \prod_{j=1}^{N+m} (j_q + \nu q^{j-1}), \tag{20}$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{j=0}^{N-1} z^j \sum_{m=0}^{j} (-1)^{N-m} \frac{q^{\frac{m(m-1)}{2}-\frac{N(N-1)}{2}} N_q!}{m_q!(N-m)_q!} \prod_{r=j-m+2}^{2N-m} (r_q + \nu q^{r-1}).$$

Теорема 11. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\prod\limits_{m=1}^{k+1} (m_q + \nu q^{m-1})}$$

де $|q| > 1$, порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, збігаються до наближуваної функції рівномірно на кожному компакті комплексної площини при $N \to \infty$.

Доведення. Користуючись зображенням (20), бачимо, що

$$Q_N(z) = (-1)^N q^{-\frac{N(N-1)}{2}} \prod_{j=1}^{2N} (j_q + \nu q^{j-1}) \times$$

$$\times \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{N} z^{N-m}(-1)^{N-m} q^{\frac{(N-m)(N-m-1)}{2}} \frac{N_q!}{m_q!(N-m)_q!} \frac{1}{\prod\limits_{j=N+m+1}^{2N} (j_q + \nu q^{j-1})} \right\} =$$

$$= (-1)^N q^{-\frac{N(N-1)}{2}} \prod_{j=1}^{2N} (j_q + \nu q^{j-1})(1 + \varepsilon_N(z)).$$

Розглянемо останню суму

$$\varepsilon_N(z) = \sum_{k=0}^{N-1} z^k (-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{N_q!}{k_q!(N-k)_q!} \frac{1}{\prod\limits_{j=2N-k+1}^{2N} (j_q + \nu q^{j-1})} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} (-z)^k \frac{q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{k_q!} \prod_{j=N-k+1}^{N} \frac{j_q}{(N+j)_q + \nu q^{N+j+1}}.$$

Оскільки, як легко переконатися,

$$(N+j)_q = N_q + q^N j_q,$$

то

$$\left|\frac{j_q}{(N+j)_q+\nu q^{N+j+1}}\right| < \frac{1}{|q|^N}$$

і, відповідно,

$$\left|\prod_{j=N-k+1}^{N}\frac{j_q}{(N+j)_q+\nu q^{N+j+1}}\right| < \frac{1}{|q|^{N(k+1)}}.$$

А тому

$$|\varepsilon_N(z)| \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^k}{|q|^{N(k+1)}}. \tag{21}$$

Якщо ми будемо брати z з компакта $K \subset K_R \subset \mathbb{C}$, то при $N > R$ ряд в правій частині (21) збігається, і, починаючи з деякого $N_0 \in \mathbb{N}$, мажоранта стане як завгодно малою. Таким чином, множина нулів знаменників $Q_N(z)$ не має граничних точок в скінченній комплексній площині. Звідси ж на основі теореми А.О. Гончара [39] випливає рівномірна збіжність апроксимант Паде функції $f(z)$ порядків $[N-1/N]$ при $N \to \infty$ на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$.

Використовуючи теореми 7 та 9, ми можемо також побудувати апроксиманти Паде для твірних функцій послідовностей (2.37) та (2.40).

Теорема 12 [25]. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{r=1}^{k}(\varkappa + r_q)}{(k+1)_q!}z^k$$

порядків $[N-1/N]$, $N \ge 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{m=0}^{N} z^{N-m}(-1)^m \frac{q^{\frac{m(m+1)}{2}-Nm}N_q!}{m_q!(N-m)_q!}\frac{(N+m)_q!}{\prod\limits_{r=1}^{m}(\varkappa + r_q)},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{j=0}^{N-1} z^j \sum_{k=0}^{j}(-1)^{N-k}\begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k-1)}{2}-\frac{N(N-1)}{2}}\frac{(2N-k)_q!}{(j-k+1)_q!\prod\limits_{r=j-k+1}^{N-k}(\varkappa + r_q)}.$$

Теорема 13 [25]. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{m=1}^{k}(m_q + \nu q^{m-1} + \varkappa)}{\prod\limits_{m=1}^{k+1}(m_q + \nu q^{m-1})}z^k$$

порядків $[N-1/N]$, $N\geq 1$, можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z)=\frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z)=\sum_{m=0}^{N} z^{N-m}(-1)^m \begin{bmatrix} N \\ m \end{bmatrix} q^{\frac{m(m+1)}{2}-Nm}\frac{\prod\limits_{p=1}^{N+m}(p_q+\nu q^{p-1})}{\prod\limits_{r=1}^{m}(r_q+\nu q^{r-1}+\varkappa)},$$

$$P_{N-1}(z)=\sum_{j=0}^{N-1} z^j \sum_{k=0}^{j}(-1)^{N-k}\begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix} q^{\frac{k(k-1)}{2}-\frac{N(N-1)}{2}}\frac{\prod\limits_{p=j-k+2}^{2N-k}(p_q+\nu q^{p-1})}{\prod\limits_{r=j-k+1}^{N-k}(r_q+\nu q^{r-1}+\varkappa)}.$$

Перейдемо тепер до розгляду функцій, узагальнені моментні зображення яких були побудовані з використанням оператора q-інтегрування (2.41). Неважко переконатись, що їх апроксиманти Паде можуть бути зображені в термінах многочленів, ортогональних по відношенню до білінійної форми $\langle x,y\rangle=\int\limits_0^1 x(\tau)y(\tau)d_q\tau$. Такі многочлени були вивчені В. Ханом (див. [70,114]), зокрема, q-поліноми Лежандра $L_N(x;q)$, для яких виконуються умови ортогональності

$$\int\limits_0^1 L_N(x;q)L_M(x;q)d_q(x)=0$$

при $N\neq M$, можуть бути зображені з точністю до постійного множника у вигляді

$$L_N(x;q)={}_2\Phi_1\left[\begin{array}{ccc} q^{-N}, & q^{N+1}; & qx \\ & q & \end{array}\right]=\sum_{k=0}^{N}\frac{(q_{-N};q)_k(q^{N+1};q)_k}{(q;q)_k(q;q)_k}(qx)^k,$$

а q-поліноми Якобі $R_N^{(\nu,0)}(x;q)$, для яких виконуються умови ортогональності

$$\int\limits_0^1 R_N^{(\nu,0)}(x;q)R_M^{(\nu,0)}(x;q)x^\nu d_qx=0$$

при $N\neq M$, можуть бути зображені з точністю до постійного множника у вигляді

$$R_N^{(\nu,0)}(x;q)={}_2\Phi_1\left[\begin{array}{ccc} q^{-N}, & q^{N+\nu+1}; & qx \\ & q^{\nu+1} & \end{array}\right]=\sum_{k=0}^{N}\frac{(q_{-N};q)_k(q^{N+\nu+1};q)_k}{(q;q)_k(q^{\nu+1};q)_k}(qx)^k.$$

Теорема 14 [27]. Апроксиманти Паде функції

$$f(z)=\frac{{}_1\Phi_1\left[\begin{array}{cc} q; & (1-q)z \\ q^{\nu+1} & \end{array}\right]-1}{z}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути зображені у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} z^{N-k} \frac{(q^{-N};q)_k (q^{N+\nu+1};q)_k}{(q;q)_k (1-q)^k} q^k,$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{m=0}^{N-1} z^m \sum_{j=0}^{m} \frac{(q^{-N};q)_{N-j} (q^{N+\nu+1};q)_{N-j} q^{N-j}}{(q;q)_{N-j} (q^{\nu+1};q)_{m-j+1} (1-q)^{N-m-1}}.$$

Теорема 15 [27]. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{1-q}{1-q^{\nu+1}} {}_2\Phi_1 \left[\begin{matrix} q; & \frac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q}; & (1+\varkappa-\varkappa q)z \\ & q^{\nu+2} & \end{matrix} \right]$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути зображені у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} z^{N-k} \frac{(q^{-N};q)_k (q^{N+\nu+1};q)_k}{(1+\varkappa-\varkappa q)^k (q;q)_k \left(\frac{q^{\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q};q\right)_k} q^k,$$

$$P_{N-1}(z) = (1-q) \sum_{m=0}^{N-1} \frac{z^m}{(1+\varkappa-\varkappa q)^{N-m}} \sum_{j=0}^{m} \frac{(q^{-N};q)_{N-j} (q^{N+\nu+1};q)_{N-j} q^{N-j}}{(q;q)_{N-j} (q^{\nu+1};q)_{m-j+1} \left(\frac{q^{N-j+\nu+1}}{1+\varkappa-\varkappa q}\right)_{N-m}}.$$

Зауваження 4. Незалежно іншим шляхом результати, еквівалентні твердженням теорем 14 та 15, були отримані в [127,151,152].

§ 4. Апроксимації Паде деяких елементарних функцій

Побудуємо тепер апроксиманти Паде функцій, розглянутих в §3 розділу 2.

Теорема 16 [165]. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{2(2+z)}{z\sqrt{4-z^2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{4-z^2}}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$ Можуть бути зображені у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$P_{N-1}(z)=\sum_{m=1}^{N} z^{N-m}(-1)^{[m/2]}\frac{1}{[(m-1)/2]!}\times$$

$$\times\sum_{k=m}^{N}\binom{N}{k}(-1)^k\frac{(N+k)!}{k!}\frac{(k-[m/2]-1)!}{(k-m)!}\sum_{j=0}^{m-1}\frac{[(j+1)/2]![j/2]!}{(j+1)!}z^j,$$

$$Q_N(z)=N!z^N+\sum_{m=1}^{N}(-1)^{[m/2]}\frac{1}{[(m-1)/2]!}\sum_{k=m}^{N}\binom{N}{k}(-1)^k\frac{(N+k)!}{k!}\frac{(k-[m/2]-1)!}{(k-m)!}z^{N-m}.$$

Доведення. Побудова вказаних апроксимант зводиться до біортогоналізації систем функцій

$$x_k(t)=\begin{cases} t^m(1-t)^m, & \text{якщо } k=2m-\text{парне},\\ t^{m+1}(1-t)^m, & \text{якщо } k=2m+1-\text{непарне},\end{cases}$$

та

$$y_j(t)=\begin{cases} t^n(1-t)^n, & \text{якщо } j=2n-\text{парне},\\ t^n(1-t)^{n+1}, & \text{якщо } j=2n+1-\text{непарне}.\end{cases}$$

Оскільки ці системи функцій складаються з алгебраїчних многочленів, і $\deg x_k(t)\equiv k$, $\deg y_j(t)\equiv j$, то така біортогоналізація повинна призвести до побудови зсунених ортонормованих на $[0,1]$ многочленів Лежандра

$$L_N^*(t)=\sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)}x_k(t). \tag{22}$$

Щоб знайти коефіцієнти $c_k^{(N)}$, $k=\overline{0,N}$, в представленні (22), необхідно зобразити функції t^k, $k=\overline{0,\infty}$, через функції $x_k(t)$, $k=\overline{0,\infty}$. Запишемо таке зображення з невизначеними коефіцієнтами

$$t^{2k}=\sum_{m=0}^{k}\alpha_m^{(k)}x_{2m}(t)+\sum_{m=0}^{k-1}\beta_m^{(k)}x_{2m+1}(t),\ k=\overline{0,\infty}, \tag{23}$$

$$t^{2k+1}=\sum_{m=1}^{k}\gamma_m^{(k)}x_{2m}(t)+\sum_{m=0}^{k}\delta_m^{(k)}x_{2m+1}(t),\ k=\overline{0,\infty}. \tag{24}$$

Розглянемо твірні функції

$$A(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{m=0}^{k}\alpha_m^{(k)}w^m,$$

$$B(z,w)=\sum_{k=1}^{\infty}z^k\sum_{m=0}^{k-1}\beta_m^{(k)}w^m,$$

$$\Gamma(z,w)=\sum_{k=1}^{\infty}z^k\sum_{m=1}^{k}\gamma_m^{(k)}w^m,$$

$$\Delta(z,w)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{k} \delta_m^{(k)} w^m.$$

Помноживши рівність (23) на t, отримаємо

$$t^{2k+1}=\sum_{m=0}^{k}\alpha_m^{(k)}x_{2m+1}(t)+\sum_{m=0}^{k-1}\beta_m^{(k)}x_{2m+1}(t)-\sum_{m=0}^{k-1}\beta_m^{(k)}x_{2m+2}(t)=$$

$$=\sum_{m=0}^{k}\alpha_m^{(k)}x_{2m+1}(t)+\sum_{m=0}^{k-1}\beta_m^{(k)}x_{2m+1}(t)-\sum_{m=1}^{k}\beta_{m-1}^{(k)}x_{2m}(t). \tag{25}$$

Оскільки функції $x_k(t)$ є лінійно незалежними, і праві частини (24) та (25) співпадають, то їх рівність збережеться, якщо ми замість функцій $x_{2m}(t)$ підставимо w^m, а замість функцій $x_{2m+1}(t)$ - нулі. Отримаємо

$$\sum_{m=1}^{k}\gamma_m^{(k)}w^m=-\sum_{m=1}^{k}\beta_{m-1}^{(k)}w^m. \tag{26}$$

Домножимо (26) на z^k і просумуємо по k від 1 до ∞. Будемо мати

$$\Gamma(z,w)=-wB(z,w). \tag{27}$$

Аналогічно встановимо співвідношення

$$A(z,w)=1-zw\Delta(z,w), \tag{28}$$

$$B(z,w)=z\Delta(z,w)+z\Gamma(z,w), \tag{29}$$

$$\Delta(z,w)=A(z,w)+B(z,w). \tag{30}$$

Розв'язуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь (27)–(30), отримаємо

$$A(z,w)=\frac{1+zw-z}{(1+zw)^2-z},$$

$$B(z,w)=\frac{z}{(1+zw)^2-z},$$

$$\Gamma(z,w)=\frac{-wz}{(1+zw)^2-z},$$

$$\Delta(z,w)=\frac{1+zw}{(1+zw)^2-z}.$$

Далі ми матимемо

$$A(z,w)=\frac{1+zw-z}{(1+zw)^2-z}=\frac{(1-\sqrt{z})/2}{1+zw-\sqrt{z}}+\frac{(1+\sqrt{z})/2}{1+zw+\sqrt{z}}=$$

$$= 1/2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k w^k}{(1-\sqrt{z})^k} + 1/2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k w^k}{(1+\sqrt{z})^k} =$$

$$= 1/2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k w^k\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(k+m-1)!}{(k-1)!m!}z^{m/2} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(k+m-1)!}{(k-1)!m!}(-1)^m z^{m/2}\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k w^k\sum_{m=k}^{\infty}\frac{(2m-k-1)!}{(k-1)!(2m-2k)!}z^m = \sum_{m=0}^{\infty}z^m\sum_{k=0}^{m}(-1)^k w^k\frac{(2m-k-1)!}{(k-1)!(2m-2k)!},$$

звідки

$$\alpha_m^{(k)} = (-1)^m\frac{(2k-m-1)!}{(m-1)!(2k-2m)!}. \tag{31}$$

Аналогічно отримаємо

$$\beta_m^{(k)} = (-1)^m\frac{(2k-m-1)!}{m!(2k-2m-1)!}, \tag{32}$$

$$\gamma_m^{(k)} = (-1)^m\frac{(2k-m)!}{(m-1)!(2k-2m+1)!}, \tag{33}$$

$$\delta_m^{(k)} = (-1)^m\frac{(2k-m)!}{m!(2k-2m)!}. \tag{34}$$

Підставляючи (31)-(34) до (23)-(24) і об'єднуючи отримані рівності, будемо мати

$$t^k = \sum_{m=1}^{k}(-1)^{[m/2]}\frac{(k-[m/2]-1)!}{[(m-1)/2]!(k-m)!}x_m(t) \tag{35}$$

для $k \geq 1$ і $t^0 = 1 = x_0(t)$. З (22) і (35) випливає, що

$$c_m^{(N)} = (-1)^{[m/2]}\frac{1}{[(m-1)/2]!}\sum_{k=m}^{N} l_k^{(N)}\frac{(k-[m/2]-1)!}{(k-m)!}$$

для $m = \overline{1,N}$ і $c_0^{(N)} = l_0^{(N)}$, де $l_k^{(N)}$, $k = \overline{0,N}$, - коефіцієнти зсунутого ортонормованого на $[0,1]$ многочлена Лежандра $L_N^*(t)$.

Зауваження 5. Аналогічно можна побудувати апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, функції

$$f(x) = \frac{2}{z\sqrt{1-\alpha^2}}\sqrt{\frac{2+(1-\alpha)z}{2-(1+\alpha)z}}\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{(2-(\alpha+1)z)(2-(\alpha-1)z)}}$$

при $\alpha \neq \pm 1$. Для цього необхідно розглянути в просторі $C[0,1]$ лінійний неперервний оператор

$$(A\varphi)(t) = \alpha t\varphi(t) + t\varphi(1-t).$$

Зауваження 6. Твердження теореми 16 справедливе і для цілого класу функцій (2.69) з заміною в ньому коефіцієнтів многочлена $L_N^*(t)$ на коефіцієнти многочлена, ортогонального на $[0,1]$ з вагою

$$\omega(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [0,1/2], \\ \varphi(1-t), & t \in [1/2,1]. \end{cases}$$

Теорема 17 [165]. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{\mathrm{tg}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути зображені у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$P_{N-1}(z) = \sum_{k=1}^{N}(-1)^k z^{N-k} \sum_{m=k}^{N} \binom{N}{m} (-1)^m \frac{(2N+2m-1)!!}{2^m} \frac{(2m)!}{(2m-2k)!} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{k-1} \frac{2^{2j+2}(2^{2j+2}-1)B_{j+1}}{(2j+2)!} z^j,$$

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^k z^{N-k} \sum_{m=k}^{N} \binom{N}{m} (-1)^m \frac{(2N+2m-1)!!}{2^m} \frac{(2m)!}{(2m-2k)!},$$

а B_j - числа Бернуллі, що визначаються формулами (див. [80, с.765])

$$B_j = \frac{(2j)!}{\pi^{2j}2^{2j-1}} \left\{ 1 + \frac{1}{2^{2j}} + \frac{1}{3^{2j}} + \frac{1}{4^{2j}} + ... \right\}. \qquad (36)$$

Доведення. Для побудови вказаних апроксимант необхідно біортогоналізувати системи функцій (2.80) та (2.81). Це еквівалентно побудові парного алгебраїчного многочлена $X_{2N}(t) = U_N(t^2)$, такого що

$$\int_0^1 U_N(t^2) t^{2k} dt = 0, \; k = \overline{0, N-1}.$$

Легко бачити, що $U_N(t)$ в такому разі співпадає з точністю до постійного множника зі зсунутим ортонормованим на $[0,1]$ з вагою $\omega(t) = t^{-1/2}$ многочленом Якобі

$$U_N(t) = R_N^{(-1/2,0)*}(t).$$

Знайдемо вирази парних степенів змінної через функції $x_{2k}(t)$. Маємо

$$\frac{\cos\sqrt{z}t}{\cos\sqrt{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k x_{2k}(t).$$

Отож,

$$\cos\sqrt{z}t = \cos\sqrt{z}\sum_{k=0}^{\infty} z^k x_{2k}(t)$$

або

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k(-1)^k}{(2k)!}\sum_{k=0}^{\infty} z^k x_{2k}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{k} x_{2m}(t)\frac{(-1)^{k-m}}{(2k-2m)!}.$$

Звідси отримаємо

$$t^{2k} = \sum_{m=0}^{k} x_{2m}(t)\frac{(-1)^m(2k)!}{(2k-2m)!}, \tag{37}$$

а це дозволяє визначити коефіцієнти біортогонального полінома $X_{2N}(t)$, а отже, і коефіцієнти чисельників та знаменників шуканих апроксимант Паде.

Зауваження 7. Апроксиманти Паде функції $\frac{\mathrm{tg} z}{z}$ раніше іншим способом були побудовані в [66, с.67].

Теорема 18 [165]. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{\sin z + 1 - \cos z}{z\cos z}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, можуть бути зображені у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$P_{N-1}(z) = \sum_{k=1}^{N}(-1)^{[k/2]}z^{N-k}\sum_{m=k}^{N}\binom{N}{m}(-1)^m\frac{(N+m)!}{(m-k)!}(\varepsilon_m + \delta_{k,m}(1-\varepsilon_m))\times$$
$$\times\left\{\sum_{j=0}^{[(k-1)/2]}\frac{2^{2j+2}\left(2^{2j+2}-1\right)B_{j+1}}{(2j+2)!}z^{2j} + \sum_{j=0}^{[k]-1}\frac{E_{j+1}}{(2j+2)!}z^{2j+1}\right\},$$

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N}(-1)^{[k/2]}z^{N-k}\sum_{m=k}^{N}\binom{N}{m}(-1)^m\frac{(N+m)!}{(m-k)!}(\varepsilon_m + \delta_{k,m}(1-\varepsilon_m)).$$

Зауваження 8. В формулюванні теореми 18 введені позначення:

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & \text{якщо } m \text{ - парне,} \\ 0, & \text{якщо } m \text{ - непарне,} \end{cases}$$

$$\delta_{k,m} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k = m, \\ 0, & \text{якщо } k \neq m; \end{cases}$$

числа Бернуллі B_j визначаються формулами (36), числа Ейлера E_j - формулами (2.79).

Доведення. Нам потрібно біортогоналізувати системи функцій $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ та $\{y_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$, визначені формулами (2.80), (2.81), (2.82) та (2.83). Легко бачити, що така біортогоналізація призведе до побудови зсунутих ортонормованих на $[0,1]$ многочленів $L_N^*(t)$. Тому для визначення коефіцієнтів знаменників та чисельників апроксимант Паде необхідно отримати зображення степеневих функцій t^k, $k = \overline{0,\infty}$, через функції $x_k(t)$, $k = \overline{0,\infty}$. Для парних степенів ми вже маємо зображення (37). Для непарних степенів запишемо відповідний вираз з невизначеними коефіцієнтами

$$t^{2k+1} = \sum_{m=0}^{k} \alpha_m^{(k)} x_{2m}(t) + \sum_{m=0}^{k} \beta_m^{(k)} x_{2m+1}(t). \tag{38}$$

Застосуємо до (38) оператор (2.70)

$$\frac{1 - t^{2k+3}}{(2k+2)(2k+3)} = \sum_{m=0}^{k} \alpha_m^{(k)} x_{2m+2}(t) + \sum_{m=0}^{k} \beta_m^{(k)} x_{2m+3}(t). \tag{39}$$

З іншого боку,

$$\frac{1 - t^{2k+3}}{(2k+2)(2k+3)} = \frac{1}{(2k+2)(2k+3)} \left\{ x_0(t) - \sum_{m=0}^{k+1} \alpha_m^{(k+1)} x_{2m}(t) - \sum_{m=0}^{k+1} \beta_m^{(k+1)} x_{2m+1}(t) \right\}. \tag{40}$$

Порівнюючи праві частини (39) та (40) і враховуючи лінійну незалежність функцій $x_k(t)$, $k = \overline{0,\infty}$, отримаємо

$$\alpha_0^{(k+1)} = 1,$$

$$\alpha_m^{(k+1)} = -(2k+2)(2k+3)\alpha_{m-1}^{(k)} = \ldots = (-1)^m \frac{(2k+3)!}{(2k-2m+3)!} \alpha_0^{(k-m+1)},$$

звідки

$$\alpha_m^{(k)} = (-1)^m \frac{(2k+1)!}{(2k-2m+1)!}$$

і також

$$\beta_0^{(k+1)} = 0,$$

$$\beta_m^{(k+1)} = -(2k+2)(2k+3)\beta_{m-1}^{(k)} = \ldots = (-1)^m \frac{(2k+3)!}{(2k-2m+3)!} \beta_0^{(k-m+1)},$$

звідки

$$\beta_m^{(k)} = 0, \quad \text{якщо } \ m < k,$$

$$\beta_k^{(k)} = (-1)^k (2k+1)! \beta_0^{(0)} = -(-1)^k (2k+1)!.$$

Ми отримуємо зображення

$$t^{2k+1} = \sum_{m=0}^{k} (-1)^k \frac{(2k+1)!}{(2k-2m+1)!} x_{2m}(t) - (-1)^k (2k+1)! x_{2k+1}(t). \tag{41}$$

Поєднуючи формули (37) та (41), будемо мати

$$t^k = \sum_{m=0}^{[k/2]} (-1)^m \frac{k!}{(k-2m)!} x_{2m}(t) - (1-\varepsilon_k)(-1)^{(k-1)/2} k! x_k(t). \tag{42}$$

З (42) отримуємо зображення для коефіцієнтів $c_k^{(N)}$, $k = \overline{0, N}$, біортогонального полінома

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} x_k(t),$$

а отже, і для коефіцієнтів знаменників та чисельників апроксимант Паде.

Зауваження 9. Продовжуючи міркування, використані при доведенні теорем 30 та 31, можна побудувати також апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, для функції $f(z) = (sec\sqrt{z} - 1)/z$. Цей результат еквівалентний побудові діагональних апроксимант Паде для функції $\cos z$, що виконана в [49].

Зауваження 10. Якщо в доведенні теореми 18 замість оператора (2.70) розглянути оператор

$$(A\varphi)(t) = \alpha \int_0^t \varphi(\tau) d\tau + \int_0^{1-t} \varphi(\tau) d\tau$$

для $\alpha \neq 1$, то можна побудувати апроксиманти Паде порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, функції

$$f(z) = \frac{(1-\alpha)\frac{\sin z\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}} - \cos z\sqrt{1-\alpha^2} + 1}{z\left(\cos z\sqrt{1-\alpha^2} - \alpha\right)}.$$

§ 5. Апроксимації Паде рядів, пов'язаних з оператором зсуву

Розглянемо тепер узагальнене моментне зображення, побудоване в §4 розділу 2. Нескладно встановити наступний результат.

Теорема 19. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha+\beta}} \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\alpha\beta(\gamma+k\lambda)^2}{\alpha+\beta}\right\}$$

порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, існують, невироджені і можуть бути зображені у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} z^{N-k} d_k^{(N)} \exp\{\alpha(k\lambda+\gamma)^2\},$$

$$P_{N-1}(z) = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha+\beta}} \sum_{m=0}^{N-1} z^m \sum_{k=0}^{m} d_{N-k}^{(N)} \times$$

$$\times \exp\left\{\alpha\left(\lambda^2 N^2 - \frac{\beta}{\alpha+\beta} m^2\lambda^2 + 2\lambda(\gamma - k\lambda)\left(N - \frac{\beta}{\alpha+\beta} m\right) + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(\gamma-\lambda k)^2\right)\right\},$$

а $d_k^{(N)}$, $k=\overline{0,N}$, - коефіцієнти узагальненого полінома

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} d_k^{(N)} \exp\{-\alpha k t\},$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} X_N(t) \exp\left\{\beta j t - \frac{1}{4\lambda}(\alpha t^2 + 2\alpha\gamma t + \beta t^2)\right\} dt = 0$$

для $j = \overline{0, N-1}$.

§ 6. Апроксимації Паде рядів, пов'язаних з дробово-лінійними перетвореннями

Розглянемо нарешті узагальнені моментні зображення, побудовані в §5 розділу 2.

Теорема 20 [166]. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_0 z^k}{(1-\delta\gamma^k)t_0 + \delta\gamma^k},$$

де $\gamma, \delta \in (0,\infty)\setminus\{1\}$, $t_0 \in (0,1)$, порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, існують, невироджені і можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{m=0}^{N-1} z^m \sum_{k=0}^{m} c_{N-k}^{(N)} \frac{t_0}{(1-\delta\gamma^{m-k})t_0 + \delta\gamma^{m-k}},$$

а $c_k^{(N)}$, $k=\overline{0,N}$, - коефіцієнти біортогонального полінома

$$Y_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} y_k,$$

що визначається співвідношеннями

$$Y_N(x_k) = 0,\ k = \overline{0, N-1}$$

(функції $x_k(t)$, $k = \overline{0,\infty}$, визначаються формулами (2.86), функціонали y_j, $j = \overline{0,\infty}$, - формулами (2.89)).

Доведення. Очевидно, що визначники Ганкеля послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ можуть бути записані у вигляді

$$H_N = \det \|s_{k+j}\|_{k,j=0}^{N} = \det \|x_k(t_j)\|_{k,j=0}^{N},$$

де точки t_j, $j = \overline{0,\infty}$, визначаються за формулами (2.88). Для того, щоб довести, що $H_N \neq 0$, досить встановити, що

i) $\{x_k(t)\}_{k=0}^{N}$ є чебишовською системою на $(0,1)$;

ii) серед точок $t_j \in (0,1)$, $j = \overline{0,N}$, немає таких, що співпадають.

Твердження i) є наслідком того, що ядро Коші $K(s,t) = \frac{1}{s+t}$ є цілком додатним нескінченного порядку (див. [60, с.22]), твердження ii) неважко встановити безпосередньою перевіркою. Таким чином, існування апроксимант Паде доведене. Аналогічно встановлюється невиродженість. Після цього формули для чисельників та знаменників записуються на основі (1.14)-(1.15).

Теорема 21 [166]. Апроксиманти Паде функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{1-\delta\gamma^k} + \frac{(\ln\delta + k\ln\gamma)\delta\gamma^k}{(1-\delta\gamma^k)^2} \right\} z^k,$$

де $\gamma, \delta \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, порядків $[N-1/N]$, $N \geq 1$, існують, невироджені і можуть бути записані у вигляді

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} z^{N-k},$$

$$P_{N-1}(z) = \sum_{j=0}^{N-1} z^j \sum_{m=0}^{j} c_{N-m}^{(N)} \left\{ \frac{1}{1-\delta\gamma^{j-m}} + \frac{(\ln\delta + (j-m)\ln\gamma)\delta\gamma^{j-m}}{(1-\delta\gamma^{j-m})^2} \right\},$$

а $c_k^{(N)}$, $k = \overline{0,N}$, - коефіцієнти полінома

$$X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} \frac{t}{(1-\delta\gamma^k)t + \delta\gamma^k},$$

для якого виконуються співвідношення біортогональності

$$\int_0^1 X_N(t) \frac{\gamma^j}{(1-(1-\gamma^j)t)^2} dt = 0,\ j = \overline{0, N-1}.$$

Доведення. Як ми вже зазначали при доведенні теореми 20, система функцій

$$x_k(t) = \frac{t}{(1-\delta\gamma^k)t + \delta\gamma^k},\ k = \overline{0, N},$$

є чебишовською на $(0, 1)$ при кожному $N = \overline{0, \infty}$. Для доведення теореми нам залишилося встановити, що чебишовською є також система функцій

$$y_j(t) = \frac{\gamma^j}{(1-(1-\gamma^j)t)^2},\ j = \overline{0, N}. \tag{43}$$

Легко бачити, що

$$\frac{d^m}{dt^m} y_j(t) = \frac{(m+1)!\gamma^j (1-\gamma^j)m}{(1-(1-\gamma^j)t)^{m+2}}.$$

Отож, вронскіан системи функцій (43) буде мати вигляд

$$W_N = \det \left\| \frac{d^m}{dt^m} y_j(t) \right\|_{j,m=0}^{N} = \det \left\| \frac{(m+1)!\gamma^j (1-\gamma^j)^m}{(1-(1-\gamma^j)t)^{m+2}} \right\|_{j,m=0}^{N} =$$

$$= \prod_{m=0}^{N} (m+1)! \prod_{j=0}^{N} \gamma^j \prod_{j=0}^{N} \frac{1}{(1-(1-\gamma^j)t)^2} \det \left\| \frac{1}{\left(\frac{1}{1-\gamma^j} - t\right)^m} \right\|_{j,m=0}^{N}.$$

Останній визначник є визначником Вандермонда (див. [61, с.118])

$$\det \left\| \frac{1}{\left(\frac{1}{1-\gamma^j} - t\right)^m} \right\|_{j,m=0}^{N} = \prod_{k<j} \left(\frac{1}{\frac{1}{1-\gamma^k} - t} - \frac{1}{\frac{1}{1-\gamma^j} - t} \right) =$$

$$= \prod_{k<j} \frac{\gamma^j - \gamma^k}{(1-t(1-\gamma^k))(1-t(1-\gamma^j))} \neq 0.$$

Звідси і випливає, що система функцій (43) є чебишевською на $(0, 1)$ при кожному $N = \overline{0, \infty}$ (див. [60, с.375]).

Р О З Д І Л 5

ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ МОМЕНТНИХ ЗОБРАЖЕНЬ ДО ПОБУДОВИ ТА ВИВЧЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ АПРОКСИМАЦІЙ ПАДЕ

§ 1. Узагальнення апроксимацій Паде

Паралельно з вивченням класичних апроксимацій Паде багато дослідників, починаючи з 60-х рр. XX ст., стали розглядати та досліджувати різноманітні їх узагальнення.

Означення 1. Нехай $E = \{e_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – ортонормований базис в деякому функціональному гільбертовому просторі $\mathscr{H}$. Тоді будемо говорити, що функція

$$[M/N]_f^{(E)}(x) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{M} p_j^{(M)} e_j(x)}{\sum\limits_{k=0}^{N} q_k^{(N)} e_k(x)} \in \mathscr{H}$$

є узагальненою апроксимантою Паде, або E-апроксимантою Паде порядку $[M/N]$ функції $f \in \mathscr{H}$, якщо

$$f(x) - [M/N]_f^{(E)}(x) \perp e_k(x)$$

для $k = \overline{0, M+N}$.

В залежності від того, який ортонормований базис використовується в означенні, розглядаються апроксиманти Паде–Чебишова, Паде–Лежандра, тригонометричні апроксиманти Паде та ін. Найбільш суттєві результати у вивченні узагальнених апроксимант Паде належать А. Гончару [37,44,167], С. Суєтіну [101,102] та ін. Див. також [9,168].

Означення 2. Нехай $z_1, z_2, \ldots, z_R \in \mathscr{D}$ – деякі точки, що належать підмножині $\mathscr{D}$ комплексної площини, і $M = (m_1, m_2, \ldots, m_R)$ – вектор з невід'ємними цілими координатами, а N - невід'ємне ціле число. Тоді будемо говорити, що раціональна функція

$$[M/N]_f(z_1, \ldots, z_R; z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)} \in \mathscr{R}\left[\sum_{r=1}^{R} m_r - N - 1/N\right]$$

є багатоточковою апроксимантою Паде індексу $[M/N]$ в точках $z_1, z_2, \ldots, z_R$ функції f, аналітичної в області $\mathscr{D}$, якщо

$$f(z) - [M/N]_f(z_1, \ldots, z_R; z) = O((z - z_r)^{m_r})$$

при $z \to z_r$, $r = \overline{1, R}$.

В різних публікаціях багатоточкові апроксиманти Паде називаються також раціональними інтерполянтами, апроксимантами Ньютона–Паде та ін. Багатоточкові апроксиманти Паде вивчались в роботах А. Гончара та Л. Гієрмо Лопеса [40,62,64,189], В. Русака [89,90,92], Є. Ровби [85-87], Л. Філозофа [105]. Див. також [145,202,208,228].

Означення 3. Нехай $F = \{f_\lambda\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$ – набір аналітичних в околі точки $z = 0$ функцій, а N та M – вектори з невід'ємними цілими координатами: $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$. Сумісними апроксимантами Паде набору F індексу $R = [M, N]$ називаються раціональні поліноми

$$[M/N]_F^{(\lambda)}(z) \in \mathscr{R}[m_\lambda/|N|],$$

$\lambda = \overline{1, \Lambda}$, де $|N| = n_1 + n_2 + \cdots + n_\Lambda$, з деяким спільним знаменником $Q_N(z)$ степеня $|N|$, для яких виконуються асимптотичні рівності

$$f_\lambda(z) - [M/N]_F^{(\lambda)}(z) = O(z^{n_\lambda + m_\lambda + 1})$$

при $z \to 0$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$.

Означення 4. Нехай $F = \{f_\lambda\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$, $\Lambda \geq 2$ – набір аналітичних в околі точки $z = 0$ функцій, а M – вектор з невід'ємними цілими координатами $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $|M| = m_1 + m_2 + \cdots + m_\Lambda$. Поліномами Паде–Ерміта набору F індексу $[M]$ називаються алгебраїчні многочлени $[M]_F^{(\lambda)}(z)$ степенів, що не перевищують m_λ, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, які не дорівнюють тотожно нулеві одночасно, тобто

$$\deg[M]_F^{(\lambda)} \leq m_\lambda, \quad \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \left| [M]_F^{(\lambda)}(z) \right| \not\equiv 0,$$

і такі, що виконується співвідношення

$$\sum_{\lambda=1}^{\Lambda} f_\lambda(z) [M]_F^{(\lambda)}(z) = O(z^{|M| + \Lambda - 1})$$

при $z \to 0$.

Вперше задача, яка фактично призвела до побудови сумісних апроксимант Паде та апроксимант Паде–Ерміта системи експонент $\{e^{\lambda z}\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$, була поставлена і розв'язана французьким математиком Ш. Ермітом [173] у зв'язку з питанням про трансцендентність числа e. Для випадку набору марковських функцій, носії яких взаємно не перетинаються, сумісні апроксиманти Паде були вивчені в роботі М. Анжелеско [115]. Сучасна формальна теорія сумісних апроксимацій Паде побудована в працях К. Малера [204], Дж. Коатса [146] та Г. Джагера [183]. Вагомий внесок у вивчення сумісних апроксимацій Паде та апроксимацій Паде-Ерміта було зроблено Є. Нікішіним [72-74] та В. Сорокіним [93-97], А. Гончаром та Є. Рахмановим [41,43], О. Аптекарєвим [1-3,116,117], В. Калягіним [57,184], В. Парусниковим [77], М.де Брюіном [132-135], М.де Брюіном, К. Драйвер та Д. Любінським [136,137], Г. Чудновським [142-144], Дж. Натоллом [209,210], В. Бекерманом та Дж. Лабаном [126] та ін. Див. також [69,107,123,124,139,140,147,148,153-156,230].

§ 2. Застосування узагальнених моментних зображень до побудови та вивчення сумісних апроксимацій Паде

Метод узагальнених моментних зображень, як встановлено в [19], може бути застосованим і до вивчення сумісних апроксимант Паде. Спершу введемо додаткове означення.

Означення 5 (див. [72]). Нехай $F = \{f_\lambda(z)\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$ - набір аналітичних в околі точки $z = 0$ функцій. Будемо говорити, що для набору F індекс $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$ є нормальним, якщо сумісні апроксиманти Паде набору F індексу R існують і їх знаменник $Q_N(z)$ має степінь в точності $|N| = n_1 + n_2 + \ldots + n_\Lambda$.

Теорема 1 [19]. Нехай F - набір аналітичних в околі точки $z = 0$ функцій $f_\lambda(z)$, $\lambda = \overline{1, \lambda}$, кожна з яких у вказаному околі зображувана степеневим рядом

$$f_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k^{(\lambda)} z^k,$$

причому для послідовностей $\{s_k^{(\lambda)}\}_{k=0}^{\infty}$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, мають місце узагальнені моментні зображення на добутку лінійних просторів $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ вигляду

$$s_{k+j}^{(\lambda)} = \left\langle x_k^{(\lambda)}, y_j \right\rangle, \; k, j = \overline{0, \infty}. \tag{1}$$

Тоді, якщо для деякого індексу $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, такого що $m_\lambda \geq |N| - 1$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, існує нетривіальний узагальнений поліном

$$Y_N = \sum_{j=0}^{|N|} c_j^{(R)} y_j, \; c_0^{(R)} \neq 0, \; c_{|N|}^{(R)} \neq 0,$$

для якого виконуються співвідношення біортогональності

$$\left\langle x_{k+m_\lambda-|N|+1}^{(\lambda)}, Y_N \right\rangle = 0, \; k = \overline{0, n_\lambda - 1}, \; \lambda = \overline{1, \Lambda},$$

то індекс R є нормальним, і сумісні апроксиманти Паде набору F індексу R можуть бути зображені у вигляді

$$[M/N]_F^{(\lambda)}(z) = \frac{P_{m_\lambda}(z)}{Q_N(z)}, \; \lambda = \overline{1, \Lambda},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{|N|} c_k^{(R)} z^{|N|-k},$$

$$P_{m_\lambda}(z) = \sum_{j=0}^{|N|} c_j^{(R)} z^{|N|-j} \sum_{p=0}^{m_\lambda+j-|N|} s_p^{(\lambda)} z^p, \; \lambda = \overline{1, \Lambda}.$$

Доведення. З (1) маємо

$$s^{(\lambda)}_{k+m_\lambda-|N|+1+j} = \left\langle x^{(\lambda)}_{k+m_\lambda-|N|+1}, y_j \right\rangle, \ k,j=\overline{0,\infty}. \tag{2}$$

Розглянемо твірні функції лівої та правої частини (2). Отримаємо, з одного боку,

$$\sum_{k=0}^{\infty} s^{(\lambda)}_{k+m_\lambda-|N|+1+j} z^k = \frac{f_\lambda(z) - \sum\limits_{k=0}^{m_\lambda-|N|+j} s^{(\lambda)}_k z^k}{z^{m_\lambda-|N|+j+1}}, \tag{3}$$

з іншого боку,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\langle x^{(\lambda)}_{k+m_\lambda-|N|+1}, y_j \right\rangle z^k = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} x^{(\lambda)}_{k+m_\lambda-|N|+1}, y_j \right\rangle. \tag{4}$$

Тепер помножимо (3) та (4) на $c_j^{(R)}$ і просумуємо за j від 0 до $|N|$. Будемо мати

$$\sum_{j=0}^{|N|} \frac{f_\lambda(z) - \sum\limits_{k=0}^{m_\lambda-|N|+j} s^{(\lambda)}_k z^k}{z^{m_\lambda-|N|+j+1}} =$$

$$= f_\lambda(z) \sum_{j=0}^{|N|} c_j^{(R)} z^{|N|-1-j-m_\lambda} - \sum_{j=0}^{|N|} c_j^{(R)} z^{|N|-1-j-m_\lambda} \sum_{k=0}^{m_\lambda-|N|+j} s^{(\lambda)}_k z^k. \tag{5}$$

З іншого боку, дістанемо

$$\sum_{j=0}^{|N|} c_j^{(R)} \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} x^{(\lambda)}_{k+m_\lambda-|N|+1}, y_j \right\rangle = \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} x^{(\lambda)}_{k+m_\lambda-|N|+1}, Y_N \right\rangle = O(z^{n_\lambda} \tag{6}$$

при $z \to 0$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$. Співставляючи (5) та (6), отримаємо

$$f_\lambda(z) Q_N(z) - P_{m_\lambda}(z) = O\left(z^{m_\lambda+n_\lambda+1}\right),$$

звідки і випливає твердження теореми.

Зауваження 1. У випадку, коли узагальнені моментні зображення (1) можуть бути записані у вигляді

$$s_k^{(\lambda)} = \left\langle A^k x_0^{(\lambda)}, y_0 \right\rangle, \ k=\overline{0,\infty},$$

відповідні похибки апроксимації при додаткових припущеннях про збіжність рядів, як легко бачити з (1.21), можуть бути зображені у вигляді

$$f_\lambda(z) - [M/N]_F^{(\lambda)}(z) = \frac{z^{n_\lambda+m_\lambda+1}}{Q_N(z)} \left\langle R_z^{\#}(A) x_{m_\lambda-|N|+1}, Y_N \right\rangle.$$

Розглянемо тепер набір вироджених гіпергеометричних функцій

$$F = \left\{ \frac{{}_1F_1(1; \nu_\lambda + 1; z) - 1}{z} \right\}_{\lambda=1}^{\Lambda}, \ \nu_\lambda > -1, \ \lambda = \overline{1, \Lambda}.$$

Теорема 2 [19]. Для сумісних апроксимант Паде набору функцій

$$F = \{f_\lambda(z)\}_{\lambda=1}^{\Lambda} = \left\{ \frac{{}_1F_1(1; \nu_\lambda + 1; z) - 1}{z} \right\}_{\lambda=1}^{\Lambda},$$

$\nu_\lambda - \nu_\mu \notin \mathbb{Z}$ при $\lambda \neq \mu$, $\nu_\lambda > -1$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, будь-який індекс $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, такий що $m_\lambda + 1 \geq |N| = n_1 + n_2 + \ldots + n_\Lambda$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, є нормальним. Сумісні апроксиманти Паде набору F вказаних індексів рівномірно збігаються до функцій $f_\lambda(z)$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, на кожному компакті комплексної площини при $|N| \to \infty$.

Доведення. Скористаємося побудованими нами в теоремі 2.2 узагальненими моментними зображеннями послідовностей коефіцієнтів степеневих розкладів функцій $f_\lambda(z)$

$$s_{k+j}^{(\lambda)} = \int_0^1 \frac{t^{k+\nu_\lambda}}{(\nu_\lambda + 1)_k} \cdot \frac{(1-t)^j}{j!} dt, \quad k, j = \overline{0, \infty}, \ \lambda = \overline{1, \Lambda}.$$

Введемо ще одне означення.

Означення 6. [72]. Систему функцій $\{u_\lambda(t)\}_{\lambda=1}^{\Lambda} \subset C[0, 1]$ будемо називати AT-системою для набору цілих чисел $r_1, r_2, \ldots, r_\Lambda$, таких що $r_\lambda \geq -1$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, якщо при будь-якому виборі алгебраїчних многочленів $A_1(t), A_2(t), \ldots, A_\Lambda(t)$, $\deg A_\lambda(t) \leq r_\lambda$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$ (якщо $r_\lambda = -1$, то вважаємо $A_\lambda(t) \equiv 0$), функція

$$A_1(t)u_1(t) + A_2(t)u_2(t) + \ldots + A_\Lambda(t)u_\Lambda(t)$$

має на $[0, 1]$ не більше, ніж $r_1 + r_2 + \ldots + r_\Lambda + \Lambda - 1$ нулів.

Легко переконатися, що система функцій $\{t^{\nu_\lambda}\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$, $\nu_\lambda - \nu_\mu \notin \mathbb{Z}$ при $\lambda \neq \mu$, є AT-системою для будь-якого набору $r_1, r_2, \ldots, r_\Lambda$. А тому, користуючись міркуваннями, застосованими при доведенні теореми 3.3, приходимо до висновку, що для кожного індексу $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, такого що $m_\lambda + 1 \geq |N|$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, існує нетривіальний поліном

$$Y_N(t) = \sum_{j=0}^{|N|} c_j^{(R)} \frac{(1-t)^j}{j!},$$

для якого виконуються умови біортогональності

$$\int_0^1 \frac{t^{k+m_\lambda-|N|+1+\nu_\lambda}}{(\nu_\lambda + 1)_{k+m_\lambda-|N|+1}} Y_N(t) dt = 0, \ k = \overline{0, n_\lambda - 1}, \ \lambda = \overline{1, \Lambda}.$$

Крім того, оскільки згідно з тими ж міркуваннями поліном $Y_N(t)$ має всі свої $|N|$ нулів в інтервалі $(0,1)$, то $c_0^{(R)} \neq 0$ і $c_{|N|}^{(R)} \neq 0$. А тому на основі теореми 1 можна зробити висновок, що індекс R є нормальним. Далі, аналогічно тому, як це робилося при доведенні теореми 4.3, неважко встановити, що для кожного компакта $K \subset \mathbb{C}$, починаючи з деякого номера $N_0 \in \mathbb{N}$, всі знаменники сумісних апроксимант Паде набору F індексів $R = [M/N]$, $m_\lambda + 1 \geq |N|$, $|N| \geq N_0$, не матимуть коренів на K. Для подальшого доведення використаємо наступний допоміжний результат.

Лема 1 [19]. Нехай для набору функцій $F = \{f_\lambda(z)\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$ індекс $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, є нормальним. Тоді для похибок сумісних апроксимацій Паде індексу R має місце аналог інтерполяційної формули Ерміта

$$f_\lambda(z) - [M/N]_F^{(\lambda)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\lambda} \left(\frac{z}{\xi}\right)^{m_\lambda+|N|+1} f_\lambda(\xi) \frac{Q_N(\xi)}{Q_N(z)} \frac{d\xi}{\xi - z}, \ \lambda = \overline{1, \Lambda}, \tag{7}$$

де $Q_N(z)$ - знаменник сумісних апроксимант Паде, Γ_λ - кусково-гладкий контур, що охоплює початок координат і знаходиться всередині області аналітичності функції $f_\lambda(z)$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$.

Нехай тепер довільний компакт K комплексної площини міститься в крузі $K_r = \{z : |z| \leq r\}$ досить великого радіуса $r > 0$. Виберемо таке $N_0 \in \mathbb{N}$, що $\forall |N| \geq N_0$ нулі знаменників $Q_N(z)$ сумісних апроксимант Паде набору F індексу $R = [M/N]$ знаходяться поза колом K_{8r}. Для отримання необхідної оцінки скористаємося формулою (7) з $\Gamma_\lambda = \partial K_{2r} = \Gamma_{2r}$. При $z \in K_r$ будемо мати

$$\left| f_\lambda(z) - [M/N]_F^{(\lambda)}(z) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^{|N|+m_\lambda+1} \sup_{\zeta \in K_{2r}} |f_\lambda(\zeta)| \times$$

$$\times \sup_{\substack{z_\mu \in \mathbb{C} \setminus K_{8r}, \\ \mu = \overline{1, |N|}}} \frac{\sup\limits_{\xi \in K_{2r}} |\xi - z_1| \cdot \ldots \cdot |\xi - z_{|N|}|}{\inf\limits_{z \in K_r} |z - z_1| \cdot \ldots \cdot |z - z_{|N|}|} \frac{1}{r} 2\pi r.$$

Зазначимо, що, якщо $|\xi - z_\mu| \leq 7r$, то

$$\frac{|\xi - z_\mu|}{\inf\limits_{z \in K_r} |z - z_\mu|} \leq 1,$$

якщо ж $|\xi - z_\mu| > 7r$, то

$$|z - z_\mu| \geq |\xi - z_\mu| - |\xi - z| \geq |\xi - z_\mu| - 3r,$$

і отож,

$$\left| \frac{\xi - z_\mu}{z - z_\mu} \right| \leq \frac{|\xi - z_\mu|}{|\xi - z_\mu| - 3r} \leq 1 + \frac{3r}{4r} = \frac{7}{4}.$$

Таким чином,

$$\left|f_\lambda(z) - [M/N]_F^{(\lambda)}(z)\right| \leq \left(\frac{7}{8}\right)^{|N|} \left(\frac{1}{2}\right)^{m_\lambda+1} \sup_{\zeta \in K_{2r}} |f_\lambda(\zeta)| \to 0$$

при $|N| \to \infty$, що і треба було довести.

Наведемо ще один результат, що стосується поведінки знаменників сумісних апроксимант Паде вироджених гіпергеометричних функцій.

Теорема 3 [22]. Знаменники сумісних апроксимант Паде набору вироджених гіпергеометричних функцій

$$F = \left\{ \frac{{}_1F_1(1; \nu_\lambda + 1; z) - 1}{z} \right\}_{\lambda=1}^{\Lambda},$$

$\nu_\lambda = \nu_1 + \frac{\lambda-1}{\Lambda}$, $\lambda = \overline{1,\Lambda}$, $\nu_1 > -1$, індексів $[\tilde{N}/N]$, де $\tilde{N} = (|N|-1, |N|-1, \ldots, |N|-1)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, а

$$n_\lambda = \begin{cases} \left[\frac{|N|}{\Lambda}\right] + 1 & \text{при } \lambda = \overline{1,\Lambda}, \\ \left[\frac{|N|}{\Lambda}\right] & \text{при } \lambda = \overline{1,\Lambda}, \end{cases}$$

де m - остача від ділення $|N|$ на Λ, рівномірно збігаються при $|N| \to \infty$ на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$

$$\frac{1}{|N|!} Q_N(z) \to \exp\left\{ \left(\left(\frac{\Lambda}{\Lambda+1} \right)^{\Lambda} - 1 \right) z \right\}.$$

Доведення. Використаємо наступний допоміжний результат.

Лема 2 [22]. Нехай $\{X_M(t)\}_{M=0}^{\infty}$ - послідовність алгебраїчних многочленів вигляду

$$X_M(t) = \sum_{k=0}^{M} c_k^{(M)} \frac{t^k}{k!},\ c_M^{(M)} = 1$$

таких, що всі їх корені $t_k^{(M)}$, $k = \overline{1,M}$, лежать в інтервалі $(0,1)$, і при цьому

$$\alpha_M = \frac{t_1^{(M)} + t_2^{(M)} + \ldots + t_M^{(M)}}{M} \to \varkappa$$

при $M \to \infty$. Тоді для многочленів

$$Q_M(z) = \sum_{k=0}^{M} c_k^{(M)} z^{M-k}$$

рівномірно на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$ виконуються граничні співвідношення

$$\frac{1}{M!} Q_M(z) \to \exp\{-\varkappa z\}.$$

Доведення леми. Очевидно, многочлени $X_M(t)$ можна зобразити у вигляді

$$X_M(t) = \prod_{k=1}^{M} \left(t - t_k^{(M)}\right).$$

Таким чином,

$$c_k^{(M)} = k!(-1)^{M-k}\sigma_{M-k},$$

де

$$\sigma_k = \sum_{i_1=1}^{M}\sum_{i_2=1}^{i_1-1}\dots\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}-1} t_{i_1}^{(M)} t_{i_2}^{(M)} \cdot \ldots \cdot t_{i_k}^{(M)},\ k = \overline{1, M},$$

$$\sigma_0 = 1.$$

При кожному $M = \overline{0, \infty}$ побудуємо допоміжні функції

$$u_M(z) = \exp\{-\alpha_M z\},$$

$$v_M(z) = \frac{1}{M!} Q_M(z) - u_M(z).$$

Очевидно, обидві функції є аналітичними у всій комплексній площині. Покажемо, що $|v_M(z)| \to 0$ при $M \to \infty$ рівномірно на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$. Маємо

$$\frac{1}{M!} Q_M(z) = \frac{1}{M!}\sum_{k=0}^{M} c_k^{(M)} z^{M-k} = \frac{1}{M!}\sum_{k=0}^{M} k!(-1)^{M-k}\sigma_{M-k} z^{M-k} = \frac{1}{M!}\sum_{k=0}^{M}(M-k)!(-z)^k\sigma_k.$$

Отже,

$$v_M(z) = \sum_{k=0}^{M}\frac{(M-k)!}{M!}(-z)^k\sigma_k - \sum_{k=0}^{M}\frac{(-z)^k}{k!}\alpha_M^k - \sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{(-z)^k}{k!}\alpha_M^k.$$

Позначимо

$$\varepsilon_{M+1} := -\sum_{k=M+1}^{\infty}\frac{(-z)^k}{k!}\alpha_M^k.$$

Очевидно, ε_{M+1} можна на кожному компакті оцінити зверху величиною, що прямує до нуля при $M \to \infty$ і не залежить від розташування коренів $t_1^{(M)}, t_2^{(M)}, \ldots, t_M^{(M)}$. Таким чином,

$$v_M(z) = \sum_{k=0}^{M}(-z)^k\left(\frac{(M-k)!}{M!}\sigma_k - \frac{\alpha_M^k}{k!}\right) + \varepsilon_{M+1}.$$

Позначимо також

$$\tau_{M,k} := \frac{(M-k)!}{M!}\sigma_k - \frac{\alpha_M^k}{k!},\ k = \overline{0, M}.$$

Легко бачити, що

$$\tau_{M,0} = \tau_{M,1} = 0,$$

$$\tau_{M,k} = \frac{(M-k)!M^{k-1}k!\sigma_k - (M-1)!(t_1^{(M)} + t_2^{(M)} + \ldots + t_M^{(M)})^k}{M!M^{k-1}k!} =$$

$$= (M-k)!\frac{k!\sigma_k - (t_1^{(M)} + t_2^{(M)} + \ldots + t_M^{(M)})^k}{M!k!} -$$

$$-\frac{((M-1)! - M^{k-1}(M-k)!)(t_1^{(M)} + t_2^{(M)} + \ldots + t_M^{(M)})^k}{M!M^{k-1}k!} = \omega_{M,k} - \rho_{M,k},\ k = \overline{2, M}.$$

Щоб належним чином оцінити $\omega_{M,k}$, зазначимо, що серед M^k доданків, що складають $\left(t_1^{(M)} + t_2^{(M)} + \ldots + t_M^{(M)}\right)^k$ є $M(M-1)\cdot\ldots\cdot(M-k+1) = \frac{M!}{(M-k)!}$ штук, сума яких дорівнює $k!\sigma_k$. Таким чином, в чисельнику після скорочення залишиться $M^k - \frac{M!}{(M-k)!}$ доданків, кожен з яких по модулю не перевищує одиниці. Маємо

$$|\omega_{M,k}| \le \frac{M^k - \frac{M!}{(M-k)!}}{M!k!}(M-k)! = \frac{1}{k!}\left\{\frac{M^{k-1}}{(M-1)(M-2)\cdot\ldots\cdot(M-k+1)} - 1\right\}.$$

Оцінимо $|\rho_{M,k}|$

$$|\rho_{M,k}| = \left|\frac{(M-k)!((M-1)(M-2)\cdot\ldots\cdot(M-k+1) - M^{k-1})}{M!M^{k-1}k!}(t_1^{(M)} + t_2^{(M)} + \ldots + t_M^{(M)})^k\right| \le$$

$$\le \frac{1}{k!}\left\{\frac{M^{k-1}}{(M-1)(M-2)\cdot\ldots\cdot(M-k+1)} - 1\right\}.$$

Таким чином,

$$|\tau_{M,k}| \le \frac{2}{k!}\left\{\frac{M^{k-1}}{(M-1)(M-2)\cdot\ldots\cdot(M-k+1)} - 1\right\} \to 0$$

при $M \to \infty$, звідки і випливає твердження леми.

Розглянемо тепер послідовність алгебраїчних многочленів $X_{|N|}(t)$ зі старшими коефіцієнтами, що дорівнюють 1, для яких виконуються умови біортогональності

$$\int_0^1 X_{|N|}(t)t^{j+\nu_\lambda}dt = 0,\ j = \overline{0, n_\lambda - 1},\ \lambda = \overline{1, \Lambda}.$$

Запишемо $X_{|N|}(t)$ в наступному вигляді:

$$X_{|N|}(t) = t^{|N|} + |N|\alpha_{|N|}t^{|N|-1} + U_{|N|-2}(t), \tag{8}$$

де $U_{|N|-2}(t)$ - алгебраїчний многочлен степені $\le |N| - 2$. Побудуємо узагальнений поліном

$$A_{|N|-1}(t) = \sum_{\lambda=1}^{\Lambda}\sum_{j=0}^{n_\lambda - 1} d_j^{(N,\lambda)}t^{j+\nu_\lambda} = \sum_{j=0}^{|N|-1} d_j^{(N)}t^{k_j}, \tag{9}$$

для якого виконуються умови

$$\int_0^1 t^j A_{|N|-1}(t)dt = 0$$

при $j = \overline{0, |N|-2}$. При $\nu_\lambda - \nu_\mu \notin \mathbb{Z}$ для $\lambda \neq \mu$ такий поліном дійсно існує і має в інтервалі $(0,1)$ в точності $|N|-1$ простий корінь. Помножимо (8) на $A_{|N|-1}(t)$ і добуток проінтегруємо на $[0,1]$ за мірою dt. Отримаємо

$$\int_0^1 \left(t^{|N|} + |N|\alpha_{|N|}t^{|N|-1}\right) A_{|N|-1}(t)dt = 0,$$

звідки

$$|N|\alpha_{|N|} = -\frac{\int_0^1 t^{|N|}A_{|N|-1}(t)dt}{\int_0^1 t^{|N|-1}A_{|N|-1}(t)dt}. \tag{10}$$

Інтегруючи частинами, знаходимо

$$\int_0^1 t^{|N|}A_{|N|-1}(t)dt = (-1)^{|N|-1}|N|! \int_0^1 t\psi_{|N|}(t)dt,$$

де

$$\psi_{|N|}(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{|N|-2}} A_{|N|-1}(t_{|N|-1|})dt_{|N|-1} \cdot \ldots \cdot dt_2 dt_1 =$$

$$= (-1)^{|N|-2} \int_0^t \frac{\tau^{|N|-2}}{(|N|-2)!} A_{|N|-1}(\tau)d\tau.$$

Аналогічно,

$$\int_0^1 t^{|N|-1}A_{|N|-1}(t)dt = (-1)^{|N|-1}(|N|-1)! \int_0^1 \psi_{|N|}(t)dt.$$

Таким чином,

$$\alpha_{|N|} = \frac{\int_0^1 t\psi_{|N|}(t)dt}{\int_0^1 \psi_{|N|}(t)dt}.$$

З (9) та (10) отримаємо

$$(-1)^{|N|-2}(|N|-2)!\psi_{|N|}(t) = \sum_{j=0}^{|N|-1} d_j^{(N)} \frac{t^{|N|-1+k_j}}{|N|-1+k_j} = t^{|N|-1+k_0} \sum_{j=0}^{|N|-1} d_j^{(N)} \frac{t^{k_j-k_0}}{|N|-1+k_j}.$$

Зазначимо, що при $\nu_\lambda - \nu_\mu \notin \mathbb{Z}$ система функцій $\{t^{\nu_\lambda}\}_{\lambda=1}^{\Lambda}$ буде AT-системою на $[0, 1+\varepsilon]$ при деякому $\varepsilon > 0$, причому будь-який многочлен вигляду (9) буде мати не більше $|N|-1$ коренів в інтервалі $(0, 1+\varepsilon)$ з врахуванням кратності. Але легко переконатися, що $\psi_{|N|}(t)$ має в точці $t = 1$ корінь кратності $|N|-1$. Отже, з точністю до постійного множника $\psi_{|N|}(t)$ матиме вигляд

$$\psi_{|N|}(t) = t^{|N|-1+k_0}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & k_1-k_0 & k_2-k_0 & \ldots & k_{|N|-1}-k_0 \\ 0 & (k_1-k_0)(k_1-k_0-1) & (k_2-k_0)(k_2-k_0-1) & \ldots & (k_{|N|-1}-k_0)(k_{|N|-1}-k_0-1) \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & t^{k_1-k_0} & t^{k_2-k_0} & \ldots & t^{k_{|N|-1}-k_0} \end{vmatrix}.$$

Зокрема, коли $k_j - k_0 = \frac{j}{\Lambda}$, $j = \overline{0, |N|-1}$, будемо мати

$$\psi_{|N|}(t) = t^{|N|-1+k_0}\left(t^{1/\Lambda}-1\right)^{|N|-1}.$$

Тоді отримаємо

$$\alpha_{|N|} = \frac{\int\limits_0^1 t^{|N|+k_0}\left(t^{1/\Lambda}-1\right)^{|N|-1}dt}{\int\limits_0^1 t^{|N|-1+k_0}\left(t^{1/\Lambda}-1\right)^{|N|-1}dt} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^1 u^{\Lambda(|N|+k_0)}(u-1)^{|N|-1}u^{\Lambda-1}du}{\int\limits_0^1 u^{\Lambda(|N|+k_0-1)}(u-1)^{|N|-1}u^{\Lambda-1}du} =$$

$$= \frac{\Gamma(\Lambda(|N|+k_0)+1)\Gamma(|N|)\Gamma(\Lambda(|N|+k_0)+|N|)}{\Gamma(\Lambda(|N|+k_0)+1+|N|)\Gamma(|N|)\Gamma(\Lambda(|N|+k_0))} =$$

$$= \frac{\Lambda(|N|+k_0)(\Lambda(|N|+k_0)+1)\cdot\ldots\cdot(\Lambda(|N|+k_0)+\Lambda-1)}{(\Lambda(|N|+k_0)+|N|)(\Lambda(|N|+k_0)+|N|+1)\cdot\ldots\cdot(\Lambda(|N|+k_0)+|N|+\Lambda-1)}.$$

Звідси маємо

$$\lim_{|N|\to\infty}\alpha_{|N|} = \left(\frac{\Lambda}{\Lambda+1}\right)^{\Lambda},$$

а значить середні арифметичні коренів біортогонального полінома $Y_N(1-t)$ прямують до $1-\left(\frac{\Lambda}{\Lambda+1}\right)^{\Lambda}$, і тому на основі леми 2 ми отримаємо твердження теореми.

Зауваження 2. Теореми 2-3 були незалежно іншим шляхом отримані М. де Брюіном [129,132].

Розглянемо тепер сумісні апроксиманти Паде набору функцій типу Міттаг-Леффлера.

Теорема 4 [30]. Для сумісних апроксимант Паде набору функцій типу Міттаг-Леффлера

$$F = \{E_\rho(z, \nu_\lambda)\}_{\lambda=1}^{\Lambda},$$

$\rho(\nu_\lambda - \nu_\mu) \notin \mathbb{Z}$ при $\lambda \neq \mu$, $\nu_\lambda > 0$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, $\rho > 0$, будь-який індекс $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, такий що $m_\lambda + 1 \geq |N| = n_1 + n_2 + \ldots + n_\Lambda$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, є нормальним. При $0 < \rho \leq 1$ сумісні апроксиманти Паде набору F вказаних індексів рівномірно збігаються до функцій набору F на кожному компакті комплексної площини при $|N| \to \infty$.

Доведення проводиться за схемою доведення теорем 2-3.

Аналогічно розглядаються сумісні апроксиманти Паде функцій, узагальнені моментні зображення яких були побудовані в теоремі 2.12.

Теорема 5. Для сумісних апроксимант Паде набору функцій

$$F = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\prod\limits_{m=1}^{k+1} (m_q + \nu_\lambda q^{m-1})} \right\}_{\lambda=1}^{\Lambda},$$

де $\nu_\mu \neq q + q^2 + \ldots + q^k + \nu_\lambda q^k$, $k = \overline{0, \infty}$, при $\lambda \neq \mu$, $\nu_\lambda > -1$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, $q \neq 1$, будь-який індекс $R = [M/N]$, $M = (m_1, m_2, \ldots, m_\Lambda)$, $N = (n_1, n_2, \ldots, n_\Lambda)$, такий що $m_\lambda + 1 \geq |N| = n_1 + n_2 + \ldots + n_\Lambda$, $\lambda = \overline{1, \Lambda}$, є нормальним. При $|q| > 1$ сумісні апроксиманти Паде набору F вказаних індексів рівномірно збігаються до функцій набору F на кожному компакті комплексної площини при $|N| \to \infty$.

§ 3. Застосування узагальнених моментних зображень до побудови та вивчення апроксимацій Паде-Чебишова

Апроксиманти Паде-Чебишова є частинним випадком узагальнених апроксимант Паде. Введемо означення, дещо відмінне від того, що випливає з означення 1.

Означення 7. Нехай функція $f \in C[-1, 1]$ розвивається в рівномірно збіжний ряд Фур'є-Чебишова вигляду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k T_k(z), \tag{11}$$

де $T_k(z) = \cos \arccos z$ - многочлени Чебишова першого роду. Апроксимантою Паде-Чебишова функції f порядку $[M/N]$ називається раціональний поліном

$$[M/N]_f^T(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)},$$

степінь чисельника якого не перевищує M, а степінь чисельника не перевищує N, і такий, що має місце розклад

$$f(z)Q_N(z) - P_M(z) = \sum_{k=M+N+1}^{\infty} \tau_k T_k(z).$$

Теорема 6 [29, 34]. Нехай функція f розвивається в рівномірно і абсолютно збіжний ряд Фур'є-Чебишова

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k T_{mk+n}(z),$$

де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, і при цьому для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle\,,\ k, j = \overline{0, \infty},$$

на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$. Нехай, крім того, при деяких $M \geq N$, $M, N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ є відмінним від нуля визначник

$$\Delta[M/N] = \det \| s_{M+1+k+j} + s_{M+1+k-j} \|_{k,j=0}^{N} \neq 0.$$

Тоді апроксиманта Паде-Чебишова функції f порядку $[mM + n/mN]$ існує і має зображення

$$[mM + n/mN]_f^T(z) = \frac{P_{mM+n}(z)}{Q_{mN}(z)},$$

де

$$Q_{mN}(z) = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} T_{mk}(z), \tag{12}$$

$$P_{mM+n}(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{k} c_j^{(N)} s_{k-j} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} T_{mk+n}(z) \sum_{j=k}^{k} c_j^{(N)} s_{j-k} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{-[-n/m]-1} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{j-k} + \frac{1}{2} \sum_{k=[-n/m]+1}^{N} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{k+j} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=N+1}^{M} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} (s_{k-j} + s_{k+j}),$$

а коефіцієнти $c_k^{(N)}$, $k = \overline{0, N}$, визначаються з умов біортогональності для узагальненого полінома

$$X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} (x_{M+1+k} + x_{M+1-k})$$

вигляду

$$\langle X_N, y_j \rangle = 0,\ j = \overline{0, N-1}.$$

Доведення. Враховуючи (11) та (12), отримаємо

$$f(z)Q_{mN}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} T_{mj}(z) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} \sum_{k=0}^{\infty} s_k \left(T_{m(k+j)+n}(z) + T_{|m(k-j)+n|}(z) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} \sum_{k=j}^{\infty} s_{k-j} T_{mk+n}(z) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} \sum_{k=0}^{[j-n/m]} s_k T_{m(j-k)-n}(z) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} \sum_{k=[j-n/m]+1}^{\infty} s_k T_{m(k-j)+n}(z) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{k} c_j^{(N)} s_{k-j} + \frac{1}{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{k-j} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} T_{mk+n}(z) \sum_{j=k}^{N} c_j^{(N)} s_{j-k} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{-[-n/m]-1} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{j-k} + \frac{1}{2} \sum_{k=[-n/m]+1}^{N} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{k+j} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{k+j} =$$

$$= P_{mM+n}(z) + \frac{1}{2} \sum_{k=M+1}^{\infty} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} (s_{k-j} + s_{k+j}) =$$

$$= P_{mM+n}(z) + \frac{1}{2} \sum_{k=M+1}^{\infty} T_{mk+n}(z) \left\langle X_N, y_{k-M-1} \right\rangle ,$$

звідки і випливає твердження теореми 6.

Теорема 7. [29, 34]. Апроксиманти Паде-Чебишова функцій, що мають зображення

$$f(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{T_n(z) - tT_{|n-m|}(z)}{1 - 2tT_m(z) + t^2} d\mu(t),$$

де $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$, а $\mu(t)$ - неспадна функція, що має нескінченну кількість точок зростання на сегменті $[\alpha, \beta] \subset [-1, 1]$, порядків $[mM + n/mN]$, $M \geq N \geq 0$, мають зображення

$$[mM + n/mN]_f^T(z) = \frac{P_{mM+n}(z)}{Q_{mN}(z)},$$

де

$$Q_{mN}(z)=\frac{1}{2}U_N(2T_m(z)),$$

$$P_{mM+n}(z)=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{T_n(z)-tT_{|n-m|}(z)}{1-2tT_m(z)+t^2}\left(U_N(2T_m(z))-U_N(t+1/t)\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{M}t^kT_{km+n}(z)U_N(t+1/t)\right)d\mu(t), \tag{13}$$

а коефіцієнти алгебраїчного многочлена $U_N(t)$ визначаються з умов біортогональності для полінома $X_N(t)=t^{M+1}U_N(t+1/t)$ вигляду

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}t^kX_N(t)d\mu(t)=0,\ k=\overline{0,N-1}.$$

Доведення. Оскільки, як відомо (див. [78, с.144])

$$\frac{T_n(z)-tT_{|n-m|}(z)}{1-2tT_m(z)+t^2}=\sum_{k=0}^{\infty}T_{km+n}(z)t^k,$$

то

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}s_kT_{km+n}(z),$$

де

$$s_k=\int\limits_{\alpha}^{\beta}t^kd\mu(t).$$

Отже, у відповідності з теоремою 6, щоб побудувати апроксиманту Паде-Чебишова функції f порядку $[mM+n/mN]$, $M\geq N\geq 0$, необхідно побудувати біортогональний поліном

$$X_N(t)=t^{M+1}\sum_{j=0}^{N}c_j^{(N)}\left(t^j+t^{-j}\right),$$

що задовольняє умови

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}t^kX_N(t)d\mu(t)=0,\ k=\overline{0,N-1}.$$

Неважко бачити, що поліном $X_N(t)/t^{M+1}$ буде алгебраїчним многочленом степеня N від змінної $t+1/t$. Позначимо його через $U_N(w)$. Отже,

$$\frac{X_N(t)}{t^{M+1}}=U_N\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

Оскільки системи функцій $\{t^k\}_{k=0}^N$ та $\{t^{M+1}(t+1/t)^j\}_{j=0}^N$ є чебишовськими на $[\alpha,\beta]$, то згідно з теоремою 3.3 невироджена біортогоналізація можлива. Крім того, поліном $U_N(t+1/t)$ має на (α,β) рівно N простих нулів. Розглянемо тепер

$$U_N(2T_m(z)) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)}\left(e^{imj\arccos z} + e^{-imj\arccos z}\right) = 2\sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} T_{mj}(z) = 2Q_{mN}(z).$$

Таким чином, знаменник апроксиманти Паде-Чебишова $[mM+n/MN]_f^T(z)$ має вигляд

$$Q_{mN}(z) = \frac{1}{2}U_N(2T_m(z)).$$

Користуючись (10) та (12), отримаємо

$$f(z)Q_{mN}(z) = Q_{mN}(z)\int_{\alpha}^{\beta}\frac{T_n(z)-tT_{|n-m|}(z)}{1-2tT_m(z)+t^2}d\mu(t) =$$

$$= Q_{mN}(z)\left\{\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{T_n(z)-tT_{|n-m|}(z)}{1-2tT_m(z)+t^2} - \sum_{k=0}^{M} t^k T_{km+n}(z)\right)d\mu(t) + \sum_{k=0}^{M} s_k T_{km+n}(z)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{T_n(z)-tT_{|n-m|}(z)}{1-2tT_m(z)+t^2} -\right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{M} t^k T_{km+n}(z)\right) U_N(2T_m(z))d\mu(t) + Q_{mN}(z)\sum_{k=0}^{M} s_k T_{km+n}(z) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{T_n(z)-tT_{|n-m|}(z)}{1-2tT_m(z)+t^2} - \sum_{k=0}^{M} t^k T_{km+n}(z)\right)\left(U_N(2T_m(z)) - U_N(t+1/t)\right)d\mu(t) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{T_n(z)-tT_{|n-m|}(z)}{1-2tT_m(z)+t^2} - \sum_{k=0}^{M} t^k T_{km+n}(z)\right)U_N(t+1/t)d\mu(t) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\sum_{k=0}^{M} t^k T_{km+n}(z) U_N(2T_m(z))d\mu(t),$$

звідки і випливає формула (13).

§ 4. Застосування узагальнених моментних зображень до побудови та вивчення двоточкових апроксимацій Паде

Має місце наступний результат, що дозволяє застосувати узагальнені моментні зображення до двоточкових апроксимацій Паде.

Теорема 8 [17]. Нехай функція f є аналітичною в деякій зв'язній області $\mathscr{D}$, що містить точки $z = 0$ та $z = z_0$, і розвивається в цій області в степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k,$$

і нехай для послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$

$$s_k = \left\langle A^k x_0, y_0 \right\rangle, \ k = \overline{0, \infty}, \tag{14}$$

з лінійним оператором $A : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, резольвентна функція якого $R_z^{\#}(A) = (I - zA)^{-1}$, є аналітичною в області $\mathscr{D}$. Нехай також при деяких $N, M \geq 0$ є відмінним від нуля визначник

$$\tilde{H}_{N,M} = \det \|\tilde{s}_{k,j+M}\|_{k,j=0}^{N} \neq 0,$$

де $\tilde{s}_k = \langle \tilde{x}_k, y_0 \rangle$, а

$$\tilde{x}_k = \left(R_{z_0}^{\#}(A)\right)^{k+1} x_k = \left(R_{z_0}^{\#}(A)\right)^{k+1} A^k x_0.$$

Тоді, якщо побудувати нетривіальний узагальнений поліном

$$Y_N = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} y_j = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} A^{*j} y_0,$$

для якого виконуються умови біортогональності вигляду

$$\langle \tilde{x}_k, Y_N \rangle = 0, \ k = \overline{0, N-1},$$

то раціональний поліном

$$[(N+M, N)/N]_f(0, z_0; z) = \frac{P_{N+M}(z)}{Q_N(z)},$$

де

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} z^{N-j},$$

$$P_{N+M}(z) = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{m=0}^{j+M} s_m z^m,$$

є двоточковою апроксимантою Паде індексу $[(N+M, N)/N]$ в точках 0 та z_0 функції f, тобто мають місце співвідношення

$$f(z) - [(N+M, N)/N]_f(0, z_0; z) = \begin{cases} O(z^{M+N}) & \text{при } z \to 0, \\ O\left((z-z_0)^N\right) & \text{при } z \to z_0. \end{cases}$$

Похибка апроксимації при цьому може бути представлена у вигляді

$$f(z)-[(N+M,N)/N]_f(0,z_0;z)=\frac{z^{N+M}(z-z_0)^N}{Q_N(z)}\left\langle R_z^{\#}(A)\left(R_{z_0}^{\#}(A)\right)^N x_N, Y_N\right\rangle.$$

Доведення. Виходячи з (14), запишемо

$$s_{k+j+M}=\left\langle A^k x_0, y_{j+M}\right\rangle,\ k=\overline{0,\infty},$$

Помножимо кожну частину цієї рівності на z^k, $k=\overline{0,\infty}$, і просумуємо їх по k від 0 до ∞ :

$$\sum_{k=0}^{\infty}s_{k+j+M}z^k=\sum_{k=j+M}^{\infty}s_k z^{k-j-M}=\frac{f(z)-\sum\limits_{k=0}^{j+M-1}s_k z^k}{z^{j+M}},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}z^k\left\langle A^k x_0, y_{j+M}\right\rangle=\left\langle R_z^{\#}(A)x_0, y_{j+M}\right\rangle.$$

Помножимо ці рівності на $\tilde{c}_j^{(N)}$, $j=\overline{0,N}$, і просумуємо по j від 0 до N :

$$\sum_{j=0}^{N}\tilde{c}_j^{(N)}\frac{f(z)-\sum\limits_{k=0}^{j+M-1}s_k z^k}{z^{j+M}}=\frac{1}{z^{j+M}}\left\{f(z)\sum_{j=0}^{N}\tilde{c}_j^{(N)}z^{N-j}-\sum_{j=0}^{N}\tilde{c}_j^{(N)}z^{N-j}\sum_{k=0}^{j+M-1}s_k z^k\right\},$$

$$\sum_{j=0}^{N}\tilde{c}_j^{(N)}\left\langle R_z^{\#}(A)x_0, y_{j+M}\right\rangle=\left\langle R_z^{\#}(A)x_0, Y_N\right\rangle.$$

Отже,

$$f(z)Q_N(z)-P_{N+M}(z)=z^{N+M}\left\langle R_z^{\#}(A)x_0, Y_N\right\rangle.$$

Розглянемо

$$R_z^{\#}(A)=(I-zA)^{-1}=(I-(z-z_0)A-z_0A)^{-1}=(I-z_0A)^{-1}\left(I-(z-z_0)(I-z_0A)^{-1}A\right)^{-1}=$$
$$=R_{z_0}^{\#}(A)\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k\left(R_{z_0}^{\#}(A)\right)^k A^k=\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k\left(R_{z_0}^{\#}(A)\right)^{k+1}A^k.$$

При умовах теореми маємо

$$f(z)Q_N(z)-P_{N+M}(z)=z^{N+M}\left\langle\sum_{k=N}^{\infty}(z-z_0)^k\left(R_{z_0}^{\#}(A)\right)^{k+1}A^k x_0, Y_N\right\rangle=$$
$$=z^{N+M}(z-z_0)^N\left\langle\sum_{k=0}^{\infty}(z-z_0)^k\left(R_{z_0}^{\#}(A)\right)^{k+N+1}A^{k+N}x_0, Y_N\right\rangle=$$
$$=z^{N+M}(z-z_0)^N\left\langle R_z^{\#}(A)\left(R_{z_0}^{\#}(A)\right)^N x_N, Y_N\right\rangle,$$

звідки і випливає твердження теореми.

В [17] також побудовано та вивчено двоточкові апроксиманти Паде виродженої гіпергеометричної функції ${}_1F_1(1;\nu+1;z)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Аптекарев А.И. Об аппроксимациях Паде к набору $\{{}_1F_1(1, c; \lambda_i z)\}_{i=1}^{k}$ // Вестн. МГУ. Математика и механика. – 1981. – N2. – С.58-62.

2. Аптекарев А.И. Асимптотика многочленов совместной ортогональности в случае Анжелеско // Мат.сборник. – 1988. – 136, N1. – С.56-84.

3. Аптекарев А.И. Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина // Мат.сборник. – 1999. – 190, N5. – С.56-84.

4. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – М.: Физматгиз, 1961. – 312 с.

5. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.Р. Аппроксимации Паде.– М.: Мир, 1986. – 502 с.

6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1965. – 296 с.

7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1974. – 296 с.

8. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. – К.: Вища шк., 1990. – 600 с.

9. Березкина Л.Л. Тригонометрические аппроксимации Паде и наилучшие приближения периодических функций. // Весці Акад.навук БССР. Сер. фіз.-мат.навук. - 1990. - N1. - С. 11–15.

10. Биленко В.И., Коновалов В.Н., Луковский И.А., Лучка А.Ю., Пухов Г.Е., Ронто Н.И. Аппроксимационные методы Дзядыка решения дифференциальных и интегральных уравнений // Укр.мат.журн. – 1989. – 41, N4. – Р.454-465.

11. Буслаев В.И. О полюсах m-й строки таблицы Паде // Мат.сборник. – 1982. – 117, N4. – С.435–441.

12. Буслаев В.И., Буслаева С.Ф. О композициях дробно-линейных преобразований // Мат.заметки. – 1997. – 61, N3. – С.332–338.

13. Буслаев В.И., Гончар А.А., Суетин С.П. О сходимости подпоследовательностей m-й строки таблицы Паде // Мат.сборник. – 1983. – 120, N4. – С.540–545.

14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

15. Гаспер Дж., Рахман М. Базисные гипергеометрические ряды. – М.: Мир, 1993. – 349 с.

16. Голуб А.П. Об аппроксимации Паде функции $\arcsin z$// Укр.мат.журн.– 1981.– 34, N1. – С. 57–61.

17. Голуб А.П. Применение обобщенной проблемы моментов к аппроксимации Паде некоторых функций. – Киев, 1981.– С.16–56. – (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 81.58).

18. Голуб А.П. Об аппроксимации Паде функции Миттаг–Леффлера // Теория приближения функций и ее приложения.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С.52-59.

19. Голуб А.П. О совместных аппроксимациях Паде набора вырожденных гипергеометрических функций // Укр.мат.журн.– 1987.– 39, N6. – С. 701–706.

20. Голуб А.П. Интегральные уравнения типа свертки и аппроксимации Паде // Исследования по теории аппроксимации функций.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С.21-23.

21. Голуб А.П. Обобщенные моментные представления и рациональные аппроксимации. – Киев, 1987. – 50 с. – (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 87.25).

22. Голуб А.П. Сходимость знаменателей совместных аппроксимаций Паде набора вырожденных гипергеометрических функций // Укр.мат.журн.– 1987.– 40, N6. – С. 792–795.

23. Голуб А.П. Доказательства теорем Паде и ван Россума с использованием обобщенных моментных представлений // Некоторые вопросы теории приближения функций и их приложения.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С.37-43.

24. Голуб А.П. Обобщенные моментные представления базисных гипергеометрических рядов// Укр.мат.журн.– 1989.– 41, N6. – С. 803–808.

25. Голуб А.П. Об одной системе биортогональных полиномов и ее приложениях // Укр.мат.журн.– 1989.– 41, N7. – С. 961–965.

26. Голуб А.П. Некоторые свойства биортогональных полиномов// Укр. мат. журн. – 1989. – 41, N10. – С. 1384–1388.

27. Голуб А.П. Об одной разновидности обобщенных моментных представлений// Укр. мат.журн. – 1989. – 41, N11. – С. 1455–1460.

28. Голуб А.П. Об одном свойстве аппроксимаций Паде гипергеометрических функций // Сиб.мат.журн.– 1990.– 31, N5. – С. 171–174.

29. Голуб А.П. Обобщенные моментные представления и аппроксимации Паде-Чебышева // Укр.мат.журн.– 1990.– 42, N6. – С. 762–766.

30. Голуб А.П. О совместных аппроксимациях Паде набора функций типа Миттаг-Леффлера // Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989. – С.38-42.

31. Голуб А.П. Некоторые свойства биортогональных полиномов и их приложения к аппроксимациям Паде// Укр. мат.журн. – 1994. – 46, N8. – С. 977–984.

32. Голуб А.П. Обобщенные моментные представления, биортогональные полиномы и аппроксимации Паде//Укр. мат.журн. – 1994. – 46, N10. – С. 1328–1335.

33. Голуб А.П. Обобщенные моментные представления и свойства инвариантности аппроксимаций Паде// Укр.мат. журн. – 1996. – 48, N3. – С. 309–314.

34. Голуб А.П. Апроксиманти Паде-Чебишева одного класу функцій // Укр.мат.журн.– 2002. – 54, N 1. – С. 15–19.

35. Гончар А.А. О сходимости аппроксимаций Паде // Мат.сборник. – 1973. – 92, N1. – С.152-164.

36. Гончар А.А. О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных

функций // Мат.сборник. – 1975. – 97, N4. – С.607-629.

37. Гончар А.А. О сходимости обобщенных аппроксимаций Паде мероморфных функций // Мат.сборник. – 1975. – 98, N4. – С.564-577.

38. Гончар А.А. Полюсы строк таблицы Паде и мероморфное продолжение функций // Мат.сборник. – 1981. – 115, N4. – С.590-613.

39. Гончар А.А. О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде // Мат.сборник. – 1982. – 118, N4. – С.535-556.

40. Гончар А.А., Гиермо Лопес Л. О теореме Маркова для многоточечных аппроксимаций Паде // Мат.сборник. – 1978. – 105, N4. – С.512-524.

41. Гончар А.А., Рахманов Е.А. О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа // Тр.Мат.Ин-та им.Стеклова АН СССР. – 1981. – 157. – С.31-48.

42. Гончар А.А., Рахманов Е.А. Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации // Мат.сборник. – 1987. – 134, N3. – С.306-352.

43. Гончар А.А., Рахманов Е.А., Сорокин В.Н. Об аппроксимациях Эрмита-Паде для систем функций марковского типа // Мат.сборник. – 1997. – 188, N5. – С.33-58.

44. Гончар А.А., Рахманов Е.А., Суетин С.П. О сходимости аппроксимаций Паде ортогональных разложений // Тр.Мат.Ин-та им.Стеклова АН СССР. – 1991. – 200. – С.136-146.

45. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения.– М.: Мир, 1985. – 414 с.

46. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представление функций в комплексной плоскости. – М.: Наука, 1966. – 672 с.

47. Дзядык В.К. Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений // Изв.АН СССР. Сер.мат. – 1974. – 38, N4. – С.937-967.

48. Дзядык И.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.

49. Дзядык В.К. Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$ // Мат.сборник. – 1979. – 108, N2. – С.247-267.

50. Дзядык В.К. Об обобщении проблемы моментов // Докл.АН УССР. – 1981. – N6. – С.8-12.

51. Дзядык В.К. Обобщенная проблема моментов и аппроксимации Паде//Укр. мат. журн. – 1983. – 35, N3. – С. 297–302.

52. Дзядык В.К. А-метод и рациональная аппроксимация // Укр.мат.журн. – 1985. – 37, N3. – С.250-252.

53. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1988. – 304 с.

54. Дзядык В.К., Голуб А.П. Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде. – Киев,

1981. – С. 3.–15. – (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 81.58).

55. Дзядык В.К., Философ Л.И. Приближение рациональными многочленами решений линейных дифференциальных уравнений с многочленными коэфициентами // Докл.АН УССР, Сер.А. – 1977. – N5. – С.392-395.

56. Дзядык В.К., Философ Л.И. О скорости сходимости аппроксимаций Паде для некоторых элементарных функций // Мат.сборник. – 1978. – 107, N3. – С.347-363.

57. Калягин В.А. Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности // Мат.сборник. – 1979. – 110, N4. – С.609-627.

58. Калягин В.А. Замечание о структуре таблицы Паде // Вестн. МГУ. Математика и механика. – 1980. – N5. – С.38-41.

59. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.

60. Карлин С., Стадден В. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. – М.: Наука, 1976. – 568 с.

61. Кострикин А.И. Введение в алгебру. – М.: Наука, 1976. – 568 с.

62. Лопес Г. Условия сходимости многоточечных аппроксимаций Паде для функций стилтьесовского типа // Мат.сборник. – 1978. – 107, N1. – С.69-83.

63. Лопес Г. О сходимости аппроксимаций Паде для мероморфных функций стилтьесовского типа // Мат.сборник. – 1980. – 111, N2. – С.308-316.

64. Лопес Г. Об асимптотике отношения ортогональных многочленов и сходимости многоточечных аппроксимаций Паде // Мат.сборник. – 1985. – 128, N2. – С.216-229.

65. Лунгу К.Н. О свойствах функций, связанных с поведением полюсов аппроксимаций Паде // Мат.заметки. – 1981. – 29, N6. – С.843-848.

66. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980. – 608 с.

67. Марков А.А. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименеее уклоняющихся от нуля. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 291 с.

68. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т.1. – М.: Наука, 1967. – 488 с.

69. Нестеренко Ю.В. Приближения Эрмита-Паде обобщенных гипергеометрических функций // Мат.сборник. – 1994. – 185, N10. – С.39-72.

70. Никифоров А.Ф., Суслов С.К., Уваров В.Б. Классические ортогональные полиномы дискретной переменной. – М.: Наука, 1985. – 215 с.

71. Никишин Е.М. О сходимости диагональных аппроксимаций Паде для некоторых функций // Мат.сборник. – 1976. – 101, N2. – С.280-292.

72. Никишин Е.М. О совместных аппроксимациях Паде // Мат.сборник. – 1980. – 113, N4. – С.499-519.

73. Никишин Е.М. Об асимптотике линейных форм для совместных аппроксимаций Паде //

Изв.вузов. Математика. – 1986. – N2. – С.33-41.

74. Никишин Е.М., Сорокин В.Н. Рациональные аппроксимации и ортогональность. – М.: Наука, 1988. – 256 с.

75. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. – М.: Наука, 1978. – 376 с.

76. Панников Д.В. Полюса приближения Паде к ${}_1F_1(1;c;z)$. // Вестн. МГУ. Математика и механика. – 1982. – N1. – С.11-14.

77. Парусников В.И. Алгоритм Якоби-Перрона и совместное приближение функций // Мат.сборник. – 1981. – 114, N2. – С.322-333.

78. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

79. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т.2. – М.: Наука, 1978. – 432 с.

80. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986. – 800 с.

81. Радзієвський Г.В. Приватне повідомлення.

82. Рахманов Е.А. О сходимости диагональных аппроксимаций Паде // Мат.сборник. – 1977. – 104, N2. – С.271-291.

83. Рахманов Е.А. О сходимости аппроксимаций Паде в классах голоморфных функций // Мат.сборник. – 1980. – 112, N2. – С.162-169.

84. Рахманов Е.А. Об асимптотике отношения ортогональных многочленов // Мат.сборник. – 1982. – 118. – С.104-117.

85. Ровба Е.А. Интерполяционные рациональные функции типа Фейера-Бернштейна // Вестн. Белорус. ун-та. Сер.1. – 1991. – N2. – С.75-78.

86. Ровба Е.А. Рациональная интерполяция дифференцируемых функций с r-й производной ограниченной вариации // Весцi НАН Беларусi. сер.фiз.-мат.навук. – 1999. – N2. – С.8-13.

87. Ровба Е.А., Русак В.Н. О скорости приближения интерполяционными рациональными операторами с заданными полюсами // Докл. АН Беларуси. – 1997. – 41, N6. – С.21-24.

88. Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 444 с.

89. Русак В.Н. Рациональные функции как аппарат приближения – Минск: Изд.БГУ, 1979. – 176 с.

90. Русак В.Н. Прямые методы в рациональной аппроксимации со свободными полюсами // Докл. АН БССР. – 1978. – 22, N1. – С.18-20.

91. Русак В.Н. Сравнение строк рациональной таблицы Чебышева-Гончара для индивидуальных аналитических функций // Докл. АН БССР. – 1986. – 30, N11. – С.969-971.

92. Русак В.Н., Луговский С.А. Рациональная интерполяция аналитических функций // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер.1. Физ., мат., информ. – 2000. – N1. – С.60-62.

93. Сорокин В.Н. О совместном приближении нескольких линейных форм // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матемаика и механика. – 1983. – N1. – С.44-47.

94. Сорокин В.Н. Обобщение многочленов Лагерра и сходимость совместных аппроксимаций Паде // Успехи мат.наук. – 1986. – 41, N1. – С.207-208.

95. Сорокин В.Н. Обобщение классических ортогональных многочленов и сходимость совместных аппроксимаций Паде // Тр.семинара им.И.Г. Петровского. – 1986. – N11. – С.125-165.

96. Сорокин В.Н. Сходимость совместных аппроксимаций Паде для одного класса функций // Мат.сборник. – 1987. – 132, N3. – С.391-400.

97. Сорокин В.Н. О совместных двухточечных аппроксимациях Паде марковских функций // Укр.мат.журн. – 1991. – 43, N6. – С.837-841.

98. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

99. Стилтьес Т. Исследования о непрерывных дробях. – Харьков; Киев: ДНТВУ, 1936. – 154 с.

100. Суетин П.Л. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 416 с.

101. Суетин С.П. Обратные теоремы об обобщенных аппроксимациях Паде // Мат.сборник. – 1979. – 109, N4. – Р.629-646.

102. Суетин С.П. О теореме Монтессу де Болора для нелинейных аппроксимаций Паде ортогональных разложений и рядов Фабера // Докл. АН СССР. – 1980. – N6. – Р.1322-1325.

103. Суетин С.П. Асимптотика полиномов Ахиезера и равномерная сходимость аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций // Успехи.мат.наук. – 1998. – 53, N6. – Р.267-268.

104. Философ Л.И. К вопросу о сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов функций. – Киев, 1977. – 20 с. – (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 77.15).

105. Философ Л.И. Условия сходимости многоточечных аппроксимаций Паде // Теория приближения функций и ее приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С.121-126.

106. Чебышев П.Л. Избранные математические труды. – М.: Гостехиздат, 1946. – 199 с.

107. Чирский В.Г. Приближения Эрмита-Паде для некоторых q-базисных гипергеометрических рядов // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика и механика. – 2000. – N2. – С.7-11.

108. Чып М.Н. Решение обобщенной проблемы моментов для некоторых специальных функций // Теория приближения функций и ее приложения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С.127-133.

109. Чып М.Н. Наддиагональная аппроксимация Паде функции типа Миттаг-Леффлера $E_{1/2}(z;\alpha)$, $\Re\alpha > 0$ // Некоторые вопросы теории аппроксимации функций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С.129-138.

110. Чып М.Н. Обобщенная проблема моментов и интегральные представления функций. – Киев, 1985. – 47 с. – (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 85.49).

111. Эндрюс Г. Теория разбиений. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

112. Agarwal A.K., Manocha H.L. A note on Konhauser sets of biorthogonal polynomials // Indag.Math. – 1980. – 42. – P.113-118.

113. Allen G.D., Chui C.K., Madych W.R., Narcowich F.J., Smith P.W. Padé approximation and orthogonal polynomials // Bull.Austral.Math.Soc. – 1974. – 10, N2. – P.263-270.

114. Andrews G.E., Askey R. Classical orthogonal polynomials // Lecture Notes Math. – 1985. – 1171. – P.36-62.

115. Angelesco M.A. Sur deux extensions des fractions continues algebriques // Comp.Rend.Acad.Sci.Paris. – 1919. – 168. – P.262-263.

116. Aptekarev A., Kaliaguine V. Complex rational approximation and difference operators // Rend.Circ.Mat.Palermo (2). Suppl. – 1998. – 1, No.52. – P.3-21.

117. Aptekarev A., Stahl H. Asymptotics of Hermite–Padé polynomials // Progress in Approximation Theory (Tampa, FL, 1990). – Springer, New York, 1992. – P.127-167.

118. Arms R.J., Edrei A. The Padé tables and continued fractions generated by totally positive sequences // Mathematical Essays. – Ohio: Ohio University Press, 1970. – P.1-21.

119. Askey R. The q-gamma and q-beta functions // Appl.Anal. – 1978. – 8, N2. – P.125-141.

120. Baker G.A. Best error bounds for Padé approximations to convergent series of Stieltjes // J.Math.Phys. – 1969. – 10. – P.814-820.

121. Baker G.A. Essentials of Padé approximants. – Academic Press, N.Y.-London, 1975. – 306 p.

122. Baker G.A., Graves-Morris P.R. Some convergence and divergence theorems for Hermite-Padé approximants // J.Comput.Appl.Math. – 1995. – 59, N3. – P.285-293.

123. Baumel R.T., Gammel J.L., Nuttall J. Asymptotic form of Hermite-Padé polynomials // IMA J.Appl.Math. – 1981. – 27, N3. – P.335-357.

124. Beckermann B., Gilewicz J., Kaliaguine V. On the definition and normality of a general table of simultaneous Padé approximants // J.Approx.Theory. – 1994. – 77, N1. – P.67-73.

125. Beckermann B., Kaliaguine V. The diagonal of the Padé table and the approximation of the Weyl function of second-order difference operators // Constr.Approx. – 1997. – 13, N4. – P.481-510.

126. Beckermann B., Labahn G. A uniform approach for Hermite-Padé approximants and their matrix-type generalizations // Numerical Algorithms. – 1992. – 3. – P.45-54.

127. Borwein P.B. Padé approximants for the q-elementary functions // Constr.Approx. – 1988. – 4, N4. – P.391-402.

128. Brezinski C. Biorthogonality and its applications to numerical analysis. – N.Y.: Marcel Dekker, 1992. – 166 p.

129. Bruin M.G.de. Convergence of the Padé table for ${}_1F_1(1; c; x)$ // K.Nederl.Ak.Wetensch., Ser.A. – 1976. – 79, N5. – P.408-418.

130. Bruin M.G.de. Three new examples of generalized Padé tables which are partly normal //

Depart. of Math., Univ. Amsterdam. – 1976. – Report 76-11. – P.1-13.

131. Bruin M.G.de. Some classes of Padé tables whose upper halves are normal // Nieuw Archief voor Wiskunde (3). – 1977. – 25, N2. – P.148-160.

132. Bruin M.G. de. Some convergence results in simultaneous rational approximation to the set of hypergeometric functions $\{_1F_1(1;c_i;z)\}_{i=1}^n$ // Lect.Notes Math. – 1984. – 1071. – P.12-33.

133. Bruin M.G. de. Some explicit formulae in simultaneous Padé approximation // Linear Algebra and Its Applications. – 1984. – 63, Dec. – P.271-281.

134. Bruin M.G. de. Simultaneous Padé approximation and orthogonality // Lect. Notes Math. – 1985. – 1171. – P.74-83.

135. Bruin M.G. de. Simultaneous rational approximation to some q-hypergeometric functions // Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation. Dordrecht: Reidel, 1988. – P.135-142.

136. Bruin M.G. de, Driver K.A., Lubinsky D.S. Convergence of simultaneous Hermite-Padé approximants to the n-tuple of q-hypergeometric series $\left\{ {}_1\Phi_1 \left(\begin{array}{c} (1,1) \\ (c,\gamma_j) \end{array} ; z \right) \right\}_{j=1}^n$ // Numerical Algorithms. – 1992. – 3. – P.185-192.

137. Bruin M.G. de, Driver K.A., Lubinsky D.S. Convergence of simultaneous Hermite-Padé approximants to the n-tuple of q-hypergeometric series $\{{}_2\Phi_0\left((A,\alpha_j),(1,1);z\right)\}_{j=1}^n$ // J.Comput.Appl.Math. – 1993. – 49. – P.37-43.

138. Bruin M.G.de, Rossum H.van. Formal Padé approximation // Nieuw Archief voor Wiskunde (3). – 1975. – 23, N2. – P.115-130.

139. Bruin M.G.de, Sharma A. Equiconvergence of some simultaneous Hermite-Padé interpolants: multiple nodes // "Approximation Theory VIII": Vol.I - River Edge: World Sci.Publ., 1995. – P.103-110.

140. Bruin M.G.de, Sharma A. Overconvergence of some simultaneous Hermite-Padé interpolants // Ann.Numer.Math. – 1997. – 4, N1-4. – P.239-259.

141. Castro G., Seghier A. Recurrence relation for biorthogonal polynomials // Comp.Rend.Acad.Sci.Paris. – 1997. – 324, N12. – P.1413-1418.

142. Chudnovsky G.V. Padé approximation and the Riemann monodromy problem // Bifurcation Phenomena in Mathematical Physics and Related Topics. – Dordrecht: Reidel, 1980. – P.449-510.

143. Chudnovsky G.V. Hermite-Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of π // Lect.Notes Math. – 1982. – 925. – P.299-322.

144. Chudnovsky G.V., Chudnovsky G.V. Multidimensional Hermite interpolation and Padé approximation // Lect.Notes Math. – 1982. – 925. – P.271-298.

145. Claessens G. On the Newton-Padé approximation problem // J.Approx.Theory. – 1978. – 22. – P.150-160.

146. Coates J. On the algebraic approximation of functions. I,II,III // Indag. Math. – 1966. – 28. – P.421-461.

147. Della-Dora J., Di-Crescenzo C. Approximation de Padé-Hermite // Lect.Notes Math. – 1979. – 765. – P.88-115.

148. Della-Dora J., Di-Crescenzo C. Approximants de Padé-Hermite. 1ére partie: theorie // Numer.Math. – 1984. – 43, N1. – P.29-39.

149. Deruyts J. Sur une class de polynômes conjugés // Memoires Coorounés et Memoires de Savant Étrangers Academie Royal des Sciences des Letters et des Beaux-Art de Belgique. – 1886. – 48.

150. Didon M.F. Sur certain systemés de polynomes associés // Annales Sci. de l'Ecole Normale Sup. – 1869. – 6. – S.111-125.

151. Driver K.A., Lubinsky D.S. Convergence of Padé approximants for a q-hypergeometric series (Wynn's power series I) // Aequat.Math. – 1991. – 42, N1. – P.85-106.

152. Driver K.A., Lubinsky D.S. Convergence of Padé approximants for a q-hypergeometric series (Wynn's power series III) // Aequat.Math. – 1993. – 45, N1. – P.1-23.

153. Driver K.A., Lubinsky D.S. Simultaneous rational approximants to Nikishin systems. I // Acta Sci.Math. (Szeged). – 1995. – 60, N1-2. – P.245-263.

154. Driver K.A., Lubinsky D.S. Simultaneous rational approximants to Nikishin systems. II // Acta Sci.Math. (Szeged). – 1995. – 61, N1-4. – P.261-284.

155. Driver K.A., Temme N.M. On polynomials related with Hermite-Padé approximations to the exponential function // J.Approx.Theory. – 1998. – 95, N1. – P.101-122.

156. Duverney D. Explicit computation of Hermite-Padé approximants // J.Approx.Theory. – 1997. – 88, N1. – P.80-91.

157. Edrei A. The Padé table of meromorphic functions of small order with negative zeros and positive poles // Rocky Mountain J.Math. – 1974. – 4, N2. – P.175-180.

158. Edrei A. Convergence of the complete Padé tables of trigonometric functions // J.Approx.Theory. – 1975. – 15, N4. – P.278-293.

159. Edrei A. The Padé tables of functions having a finite number of essential singularities // Pacific J.Math. – 1975. – 56, N2. – P.429-453.

160. Edrei A. The Padé tables of entire functions // J.Approx.Theory. – 1980. – 28, N1. – P.54-82.

161. Frobenius G. Ueber Relationen zwischen den Näherungsbrüchen von Potenzreihen // J.für Reine Angewandte Math. – 1881. – 90. – S.1-17.

162. Gautschi W. On Padé approximants associated with Hamburger series // Calcolo. – 1983. – 20, N2. – P.111-127.

163. Gilewicz J. Approximants de Padé // Lect.Notes.Math. – 1978. – 667. – P.1-511.

164. Gilewicz J. Story of rational approximation for the class of Stieltjes functions: from Stieltjes to recent optimal estimations of errors // Укр.мат.журн. – 1994. – 46, N7. – P.941–943.

165. Golub A.P. Generalized moment representations and Padé approximants// Теорія наближення функцій та її застосування: Праці Інституту математики НАН України. Т.31. - К.: Ін-т

математики НАН України, 2000. – С.144–160.

166. Golub A.P. Generalized moment representations and Padé approximants associated with bilinear transformations// Укр.мат.журн. – 2002. – 54, N5. – C.335–339.

167. Gonchar A.A., Rakhmanov E.A., Suetin S.P. On the rate of convergence of Padé approximants of orthogonal expansions // Progress in Approximation Theory (Tampa, FL, 1990). – Springer, New York, 1992. – P.169-190.

168. Gutknecht M. The multipoint Padé table and general recurrences for rational interpolation // Acta Appl.Math. – 1993. – 33, N2-3. – P.165-194.

169. Hamburger H. Über eine Erweiterung des Stieltjessen Momentproblems. I,II,III // Math.Ann. – 1920. – 81. – S.235-319; 1921. – 82. – S.120-164, 168-187.

170. Hausdorf F. Summationsmethoden und Momentfolgen. I,II // Math.Zeitschrift. – 1921. – 9. – S.74-109, 280-299.

171. Hendriksen E., Rossum H. van. Moment methods in Padé approximation // J.Approx.Theory. – 1982. – 35, N3. – P.250-263.

172. Hendriksen E., Rossum H. van. Moment methods in Padé approximation: the unitary case // J.Math.Anal and Appl. – 1984. – 104, N2. – P.512-525.

173. Hermite C. Sur la fonction exponentielle // Oeuvres, t.III. – 1873. – P.151-181.

174. Iserles A. A note on Padé approximations and generalized hypergeometric functions // BIT. – 1979. – 19, N 4. – P.543-545.

175. Iserles A., Nørsett S.P. Bi-orthogonal polynomials // Lect.Notes.Math. – 1985. – 1171. – P.92-100.

176. Iserles A., Nørsett S.P. On the theory of bi-orthogonal polynomials // Math. and Comput. – 1986. – N 1. – 42 p.

177. Iserles A., Nørsett S.P. Bi-orthogonality and zeros of transformed polynomials // J.Comput.Appl.Math. – 1987. – 19, N1. – P.39-45.

178. Iserles A., Nørsett S.P. Explicit representations of bi-orthogonal polynomials // Numerical Algorithms. – 1995. – 10, N1-2. – P.51-67.

179. Iserles A. Saff E. B. Bi-orthogonality in rational approximation. // J.Comput.Appl.Math. – 1987. – 19, N1. – P.47-54.

180. Ismail M., Perline R., Wimp J. Padé approximants for some q-hypergeometric functions // Progress in Approximation Theory (Tampa, FL, 1990). – Springer, New York, 1992. – P.37-50.

181. Jackson F.H. Transformation of q-series // Messenger Math. – 1910. – 39. – P.145-153.

182. Jacobi C.G.J. Über die Darstellung einer Reihe gegebner Werthe durch eine gebroche rationale Function // J.für Reine Angewandte Math. – 1846. – 30. – S.127-156.

183. Jager H. A multidimensional generalization of the Padé table // Indag. Math. – 1964. – 26. – P.192-249.

184. Kaliaguine V. The operator moment problem, vector continued fractions and an explicit form of the Favard theorem for vector orthogonal polynomials // J.Comput.Appl.Math. – 1995. – 65. – P.181-193.

185. Karlsson J., vol Sydow B. The convergence of Padé approximants to series of Stieltjes // Arkiv for Math. – 1976. – 14, N1. – P.43-53.

186. Konhauser J.D.E. Some properties of biorthogonal polynomials // J.Math.Anal.Appl. – 1965. – 11. – P.242-260.

187. Konhauser J.D.E. Biorthogonal polynomials suggested by the Laguerre polynomials // Pacific J.Math. – 1967. – 21, N2. – P.303-304.

188. Kovacheva R., Saff E.B. Zeros of Padé approximants for entire functions with smooth Maclaurin coefficients // J.Approx.Theory. – 1994. – 79, N3. – P.374-384.

189. López L.G. Survey on multipoint Padé approximation to Markov type meromorphic functions and asymptotic properties of the orthogonal polynomials generated by them // Lect.Notes.Math. – 1985. – 1171. – P.309-316.

190. Lubinsky D.S. Diagonal Padé approximants and capacity // J.Math.Anal. Appl. – 1980. – 78, N1. – P.58-67.

191. Lubinsky D.S. On non-diagonal Padé approximants // J.Math.Anal. Appl. – 1980. – 78, N3. – P.405-428.

192. Lubinsky D.S. Padé tables of entire functions of very slow and smooth growth // Constr. Approx. – 1985. – 1, N4. – P.349-358.

193. Lubinsky D.S. Padé tables of entire functions of very slow and smooth growth. 2 // Constr. Approx. – 1988. – 4, N3. – P.321-339.

194. Lubinsky D.S. Uniform convergence of rows of the Padé table for functions with smooth Maclaurin series coefficients // Constr. Approx. – 1987. – 3, N3. – P.307-330.

195. Lubinsky D.S. Convergence of diagonal Padé approximants for functions analytic near 0 // Trans.Amer.Math.Soc. – 1995. – 347, N8. – P.3149-3157.

196. Lubinsky D.S. On the diagonal Padé table approximants of meromorphic functions // Indag.Math. – 1996. – 7, N1. – P.97-110.

197. Lubinsky D.S., Saff E.B. Convergence of Padé approximants of partial theta functions and Rogers-Szegö polynomials // Constr. Approx. – 1987. – 3, N4. – P.331-361.

198. Luke Y.L. The Padé table and the τ-method // J.Math. and Phys. – 1958. – 37. – P.110-127.

199. Luke Y.L. The special functions and their approximations. Vol.2. – N.Y.: Academic Press, 1969. – 486 p.

200. Luke Y.L. On the error in the Padé approximants for a form of the incomplete gamma function including the exponential function. // SIAM J. Math. Anal. – 1975. – 6, N5. – P.829–839.

201. Luke Y.L. On the error in Padé approximations for functions defined by Stieltjes integrals // Comput.Math. – 1977. – 3, N4. – P.307-314.

202. Magnus A. On the structure of the two-point Padé table // Lect.Notes Math. – 1982. – 932. – P.176-193.

203. Magnus A., Wynn J. On the Padé table of $\cos z$ // Proc.Amer.Math.Soc. – 1975. – 47, N2 – P.361-367.

204. Mahler K. Perfect systems // Compositio Math. – 1968. – 19, N2 – P.95-166.

205. Majumdar S.K., Mandal N. On a difficulty of constructing Padé approximation of order (n, n) to the hypergeometric function $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ // Indian J.Pure and Appl.Math. – 1976. – 7, N10. – P.1195-1198.

206. Majumdar S.K., Sinha D.P. A note on Padé approximations of order (m, n) to the hypergeometric function $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ // Indian J.Pure and Appl.Math. – 1977. – 8, N5. – P.627-635.

207. Montessus de Ballore R.de. Sur les fractions continues algébriques // Bull.Soc.Math. de France – 1902. – 30. – P.28-36.

208. Njåstad O. A multi-point Padé approximation problem // Lect.Notes Math. – 1986. – 1199. – P.263-268.

209. Nuttall J. Hermite-Padé approximants to functions meromorphic on a Riemann surface // J.Approx.Theory. – 1981. – 32, N3. – P.233-240.

210. Nuttall J. Asymptotics of diagonal Hermite-Padé polynomials // J.Approx.Theory. – 1984. – 42, N4. – P.299-386.

211. Nuttall J., Singh S.R. Orthogonal polynomials and Padé approximants associated with a system of arcs // J.Approx.Theory. – 1977. – 21, N1. – P.1-42.

212. Padé H. Sur la répresentation approchée d'une fonction par des fractions rationelles // Ann.de l'Ecole Normale Sup.(3) – 1892. – 9., Suppl. – P.3-93.

213. Padé H. Recherches sur la convergence des développements en fractions continues d'une certaine catégorie de fonctions // Ann.de l'Ecole Normale Sup.(3) – 1907. – 24. – P.341-400.

214. Rossum H. van. Systems of orthogonal and quasiorthogonal polynomials connected with the Padé table. I, II, III // Proc. Koninklijke Nederlandse Akademie Van Wetenschappen. Ser. A. – 1955. – 58, N 4. – P.517-534.

215. Rossum H. van. Padé approximants and indefinite inner product spaces // "Padé and Rational Approximation. Theory and Applications"E.B.Saff, R.S.Varga eds., Tampa, 1976. - N.Y., Academic Press, 1977. – P.111-119.

216. Rossum H. van. Orthogonal expansions in indefinite inner product spaces // Lect.Notes.Math. – 1979. – 765. – P.172-183.

217. Rossum H. van. Formally biorthogonal polynomials // Lect.Notes.Math. – 1981. – 888. – P.341-351.

218. Saff E.B., Varga R.S. Convergence of Padé approximants to e^{-z} on unbounded sets // J.Approx.Theory. – 1975. – 13. – P.470-488.

219. Saff E.B., Varga R.S. On the zeros and poles of Padé approximants to e^{-z} // Numer.Math. –

1975-1976. – 25, N1. – P.1-14.

220. Saff E.B., Varga R.S. The behavior of the Padé table for the exponential // "Approximation Theory II, Proc.Internat.Sympos., Univ.Texas, 1976. – P.519-531.

221. Saff E.B., Varga R.S. On the zeros and poles of Padé approximants to e^{-z}. III // Numer.Math. – 1978. – 30, N3. – P.241-266.

222. Srivastava H.M. On the Konhauser sets of biorthogonal polynomials suggested by the Laguerre polynomials // Pacific J.Math. – 1971. – 37. – P.801-804.

223. Stahl H. Orthogonal polynomials with complex-valued weight function. I,II // Constr.Approx. – 1986. – 2, N3. – P.225-251.

224. Stahl H. Three different approaches to a proof of convergence for Padé approximants // Lect.Notes.Math. – 1987. – 1237. – P.79-124.

225. Stahl H. Diagonal Padé approximants to hyperelliptic functions // Ann.Fac.Sci.Toulouse Math.(6). – 1996. – Special Issue. – P.121-193.

226. Stahl H. The convergence of diagonal Padé approximants and the Padé conjecture // J.Comput.Appl.Math. – 1997. – 86, N1. – P.287-296.

227. Stahl H. The convergence of Padé approximants to functions with branch points // J.Approx.Theory. – 1997. – 91, N2. – P.139-204.

228. Wallin H. Convergence and divergence of multipoint Padé approximants of meromorphic functions // Lect.Notes Math. – 1984. – 1105. – P.272-284.

229. Walliser R. Rationale Approximation des q-Analogons der Exponentialfunktion und Irrationalitätsaussagen für diese Funktion // Arch.Math. – 1985. – 44, N1. – S.59-64.

230. Wielonsky F. Asymptotics of diagonal Hermite-Padé approximants to e^z // J.Approx.Theory. – 1997. – 90, N2. – P.283-298.

231. Wielonsky F. Rational approximation to the exponential function with complex conjugate interpolation points // J.Approx.Theory. – 2001. – 111, N2. – P.344-368.

232. Wimp J., Beckermann B. Some explicit formulas for Padé approximants of ratios of hypergeometric functions // Contributions in Numerical Mathematics. - World Sci.Publ., River Edge, N.J., 1993. – P.427-434.

233. Wynn P. A general system of orthogonal polynomials // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) – 1967. – 18. – P.81–96.

234. Wynn P. Upon the Padé table derived from a Stieltjes series // SIAM J.Numer. Anal. – 1968. – 5. – P.805-834.